UNIVERSIDAD CATÓLICA DE SALTA

Autoridades

Rector	Ing. Rodolfo Gallo Cornejo
Vicerrectora Académica	Mg. Prof. Lilian Constanza Diedrich
Vicerrector Administrativo	Dr. Darío Eugenio Arias
Vicerrector de Formación	Pbro. Dr. Cristian Arnaldo Gallardo
Vicerrector de Investigación y Desarrollo	Dr. Federico Colombo Speroni
Director General del Sistema de Educación a Distancia	Ing. Lic. Daniel Torres Jiménez
Secretaria General	Lic. Silvia Milagro Álvarez
Decano de la Facultad de Arquitectura y Urbanismo	Dr. Pablo Andrés Pronc

Eucasa (Ediciones Universidad Católica de Salta)

Directora	Lic. Rosanna Caramella
Edición	Prof. Soledad Martínez Saravia
Comercialización	Lic. Mariana Remaggi

ARQUIMÁTICA

ROLANDO MAZZAGLIA

EUCASA
Ediciones Universidad Católica de Salta
Salta - Argentina

Mazzaglia, Rolando
ArquiMática / Rolando Mazzaglia. - 1a ed. - Salta: Universidad Católica de Salta. Eucasa, 2020.
Libro digital, PDF - (EUCASA clase / Arquitectura)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-623-222-1

1. Arquitectura. 2. Matemática Aplicada. I. Título.
CDD 720.2

Para citar este libro:
Mazzaglia, R. (2020). *Arquimática*. Salta: EUCASA (Ediciones Universidad Católica de Salta). Recuperado de http://..., día / mes / año.

© 2020, por EUCASA (Ediciones Universidad Católica de Salta)
Colección: *EUCASA Clase / Arquitectura*
Resolución Rectoral: 413/2020

Diseño interior: Fabio Viale (fabiocomunicadorvisual@gmail.com)
Arte de tapa: D.G. Carolina Ísola (isocaro@hotmail.com)

Domicilio editorial: Campus Universitario Castañares - 4400 Salta, Argentina
Web: www.ucasal.edu.ar/eucasa
Tel./fax: (54-387) 426 8607
e-mail: eucasa@ucasal.edu.ar
Depósito Ley 11.723
ISBN: 978-950-623-222-1

Este libro no puede ser reproducido total o parcialmente, sin autorización escrita del editor.

Índice general

Arquimática. ¿Qué es la ArquiMática? 9
Agradecimientos 11
Dedicatoria in memoriam 13
Matemática, definiciones 15
La historia de los siete sabios de Grecia y sus sentencias 17
Capítulo I
Geometría plana 23
Capítulo II
Geometría del espacio 83
Capítulo III
Geometría analítica 153
Capítulo IV
Secciones cónicas 181
Capítulo V
Superficies cuádricas 211
Capítulo VI
Trigonometría 233
Capítulo VII
Relaciones y funciones 293
Capítulo VIII
Análisis matemático 353
Capítulo IX
Desafíos y curiosidades, acertijos y diversiones 423
El fin de la historia que no tiene final 437

ArquiMática

¿Qué es la ArquiMática?

En el 2014, cuando empezó mi aventura de ser lo que nunca quise ser, docente a cargo de esta materia que se llama Matemática, me di cuenta de que todo debe estar orientado hacia el objetivo que se persigue. Los alumnos me hicieron entender que esta materia debía orientarse hacia los conocimientos para el desarrollo de la carrera de Arquitectura, y aún más para la misma profesión. ¿Para qué estudiamos matemática? Fue una de las primeras preguntas. ¿Para qué nos sirve la matemática en arquitectura? Fue otra pregunta recurrente.

Me había preparado para enseñarles el teorema del coseno, la clasificación de las Funciones y también los puntos notables de un triángulo, entre otros temas propios de la materia, porque creí que sobre esta temática rondarían sus requerimientos. Nada de ello ocurrió. De haber ocurrido tenía todas las respuestas. El caso es que me preguntaban lo que ya les conté y no tenía respuesta. Podría haberles dicho que estaba en el plan de la carrera y que obligatoriamente tenían que cursarla. Pero no les dije nada y comencé a recorrer el programa de la materia y tratar de dar respuesta a las preguntas que me hacían. De repente me acordé: ¡el Parthenón! Gran obra de arquitectura proyectada con el irracional número de oro. Fue la primera aplicación que encontré y así siguieron otras tantas y muchas aplicaciones que ahora no les contaré y que descubrirán con la lectura de este libro.

¿Cuál es la bibliografía recomendada? ¿Qué libros podemos consultar? Fueron las preguntas que siguieron. De nuevo, preguntas sin respuestas. Comencé a buscar libros de matemática escritos para arquitectos y la sorpresa es que no encontré ninguno.

Libros de matemática se escribieron siempre, en todos los tiempos y en todas las lenguas, pero consagrados a la arquitectura no lo sé. Le pregunté a mi amigo Francisco, que siempre sabe de todo, y tampoco sabía.

Ahora que ya saben de qué se trata podemos ensayar una definición: "ArquiMática es el conjunto de conocimientos matemáticos que tiene aplicación en el desarrollo de la carrera de Arquitectura y es de interés para la profesión del arquitecto".

Agradecimientos

Son muchas las personas que me ayudaron con la confección de este libro a las cuales quiero agradecer. Sin sus valiosos aportes este libro no hubiera sido posible. El orden no implica importancia, todas las ayudas recibidas fueron importantes.

- A la ingeniera Eleonora Robles, quien revisó y corrigió varios capítulos.
- A mi amigo Francisco, el licenciado Cerón García, quien también me ayudó con la revisión.
- A la dibujante Eulogia Merle, ilustradora del diario El País de Madrid, quien me permitió la utilización de sus creaciones en las portadas de los capítulos.
- Al señor Juan Carlos Fernández Gordillo de la página Vitutor, quien me autorizó a utilizar ejercicios de la web para incorporar al libro.
- Al ingeniero de caminos y profesor de matemáticas Amadeo Artacho, de la página matematicascercanas.com, quien me autorizó a utilizar imágenes de su blog para incorporar al libro.
- Al señor Gabriel Vera Prado, de la página Portal Educativo, sitio www.portaleducativo.net, quien me autorizó a utilizar imágenes para incorporar al libro.
- Al señor Roberto Cardil, de la página matematicasVisuales, quien me autorizó a utilizar imágenes de la web para incorporar al libro.
- A la licenciada Rosanna Caramella, directora de Eucasa, quien siempre prestó su inestimable colaboración para la edición de este libro.
- A la señorita Silvana Carolina Jorqui y al señor Agustín González Boris, quienes realizaron el diseño gráfico de las portadas de los capítulos.
- Al señor Luciano Villagra Araoz, que realizó el rediseño de los gráficos de los capítulos del libro.
- A mi hijo Nicolás que revisó las tres historias de este libro.
- A mis compañeros Omar Caballero y Rodrigo Delgado.
- A los anónimos que publicaron en las páginas de Internet muchos artículos que tomé para incluir en este libro, que sirvieron de fuente de inspiración. A mí solo me pertenecen los arreglos y agregados que realicé.

A todos ellos, mis agradecimientos.

Matemática

DRAE (Diccionario de la Real Academia Española): "Ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones. Estudio de la cantidad considerada en abstracto o aplicada."

Definiciones relevantes por matemáticos y filósofos famosos

María Moliner: "Ciencia que trata de las relaciones entre las cantidades y magnitudes y de las operaciones que permiten hallar alguna que se busca, conociendo otras."

René Descartes: "La matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos y fáciles."

Galileo Galilei: "Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el Universo". "Las matemáticas son el lenguaje de la naturaleza".

Benjamin Peirce: "La matemática es la ciencia que extrae conclusiones necesarias. Es el estudio de lo verdadero de las situaciones hipotéticas."

Daniel Henry Gottlieb: La matemática es el estudio de los conceptos bien definidos.

John D. Barrow: "Matemática es el nombre que le damos a la colección de todas las pautas e interrelaciones posibles. La esencia de la matemática está en la relación entre cantidades y cualidades."

Georg Wilhelm Friedrich Hegel: "Objeto de las matemáticas son el número y el espacio abstracto. El ser matemático es un ser aún sensible, aunque abstractamente."

David Hilbert: "La matemática es el sistema de las fórmulas demostrables. En un cierto sentido, el análisis matemático es una sinfonía del infinito."

Friedrich Nietzsche: "Las matemáticas son solo el instrumento del conocimiento general y último del ser humano."

Cuando a **Albert Einstein** le preguntaron: "¿Cómo puede ser que las matemáticas, siendo después de todo un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, estén tan admirablemente adaptadas a los objetos de la realidad?". Este responde (y sabe lo que dice): "...cuando las leyes de la matemática se refieren a la realidad, no son exactas; cuando son exactas, no se refieren a la realidad".

La historia de los siete sabios de Grecia y sus sentencias

Los siete sabios de Grecia eran conocidos —en Grecia, claro— además de por sabios, por lo que de práctico tenía su sabiduría. Y es que además de ser tiranos, políticos, estadistas, legisladores y reformadores sociales eran, por si fuera poco, famosos por sus aforismos y sentencias, es decir, por sus frases estudiadas y meditadas con las que pretendían guiar la conducta de los hombres para su realización personal y espiritual.

Y todos en su época decían que se les recordaría para siempre, aunque solamente uno de ellos, Thales de Mileto, que además era el único matemático de los siete, ha pasado a la posteridad para que sigamos recordando y estudiando su obra como muestra de que las matemáticas son inmortales.

A Thales de Mileto la historia le impuso la injusticia del orden alfabético al confeccionar la lista que incluía a los siete sabios. El tiempo ha demostrado que la lista se ha invertido (como lo presagiarían las Sagradas Escrituras), pasando el último a ser el primero en el respeto y la admiración de las generaciones de personas que le hemos seguido desde entonces hasta ahora. De esta manera la lista que ha llegado a nosotros a través de los siglos, con el injusto orden alfabético ya mencionado, es la siguiente:

1. **Bías de Priene**: Eminente político griego y famoso legislador.
2. **Cleóbulo de Lindos**: Tirano de Lindos, en la isla de Rodas.
3. **Periandro de Corinto**: Tirano, como su nombre indica, de Corinto, isla famosa por sus pasas de uva. Se dice de él que reglamentó y humanizó el régimen de trabajo de los esclavos. Bajo su mandato Corinto conoció una gran prosperidad.
4. **Pitaco de Mitilene**: Estadista que intentó restringir el poder de la nobleza otorgando más protagonismo a las clases populares.
5. **Quilón de Esparta**: Político que militarizó la vida civil de los espartanos dando a la juventud una educación castrense.
6. **Solón de Atenas**: Legislador y reformador social.
7. **Thales de Mileto**: Matemático, filósofo, geómetra, ingeniero y político dotado de una gran sabiduría práctica y poseedor de una ingente cantidad de conocimientos.

Un día del siglo VI a.C. Thales estaba especialmente feliz. Las autoridades de Delfos habían elegido una de sus sentencias para grabarla en el frontón del templo de Apolo. Y allí estaba Thales viendo cómo los escultores retiraban los andamios después de dejar grabada para la posteridad su máxima: "Conócete a ti mismo".

Thales había invitado a la inauguración de la sentencia a sus colegas sabios y allí estaban todos menos Solón de Atenas y Bías de Priene. Y cuando se estaban preguntando

qué podría haberles pasado, aparecieron jadeando colina arriba hasta llegar a la puerta del templo donde los otros cinco los esperaban.

Periandro: —Salud, queridos colegas, ¿Qué os ha pasado que venís tan agitados?

—Casi nada —contestó Solón— que yo, mucha fama de sabio y Bías me engaña como a un cretense, que todavía no puedo decir "como a un indio con espejitos" ya que aún no sabemos que existe América.

—¿Qué te ha pasado? —preguntó Thales— Explicamelo tú, que para eso eres matemático.

— "No lo soy, el matemático eres tú" —contestó Solón—, pero igual te contestaré. Bías y yo teníamos que recorrer una distancia de 50 kilómetros. Disponíamos de un caballo que marchaba a 10 km/h, pero solo podía llevar a uno por vez.

—Pues vaya caballo —dijo Thales, sonriendo—. Estos del transporte están muy pretensiosos, me recuerda al burro que solo podía cargar 300 zanahorias para llevarlas hasta el mercado.

—¿Qué burro? —preguntó Bías.

—El del capítulo IX —le respondió Thales.

—¿Y eso? —protestó Bías— Recién estamos en el prefacio de este libro y tú te refieres al capítulo IX. Sigue tú, Solón.

—Sí, ¿qué le vamos a hacer?, pero no teníamos otro. Pues bien, yo caminaba a razón de 5 km/h y Bías a 8 km/h. —dijo Solón.

—¿Y eso? —preguntó, desconcertado, Cleóbulo de Lindos.

—Es que Bías es más joven que yo —contestó Solón—. Así que decidimos turnarnos andando a pie y cabalgando. Cada uno ataba el caballo a un árbol tras su cabalgata, para que lo recogiera el otro, y continuaba a pie. De esta forma llegamos a la mitad del camino al mismo tiempo y descansamos media hora. Después repetimos la misma combinación para llegar simultáneamente al final del trayecto. Y como estoy mareado y confundido, pregunto: ¿A qué hora hemos llegado a nuestro destino si salimos a las 6 de la mañana? O sea, ¿qué hora es? —preguntó Solón después de plantear el problema.

Todos iban a consultar sus relojes de arena de bolsillo, menos Pitaco de Mitilene que lo llevaba sujeto a la muñeca con una correa de cuero convencido de que era un invento con futuro, cuando Thales exclamó:

—¡No! ¡Quietos! Ya que sois tan sabios, ¿por qué no intentáis resolver la historia como un problema?

—Hombre, por qué yo, por ejemplo, soy más tirano y sabio que matemático, y a mí los cálculos, la verdad… —reconoció Periandro de Corinto, acobardado por el desafío de Thales y añadió— Pero, en cambio, ¡ayer se me ocurrió una sentencia agudísima!, escuchad: "Los placeres son mortales, las virtudes inmortales".

—¿Y a qué viene eso? —preguntó Bías de Priene, aún agotado por el cansancio de la caminata.

—Para que vierais que, a pesar de que no se me den bien las matemáticas, también quiero que se me considere sabio.

—Pues a mí se me acaba de ocurrir otra sentencia —dijo Cleóbulo de Lindos— escuchad: "Ocupémonos de comportarnos bien con el cuerpo y con el alma".

—Pues a mí se me ha ocurrido otra… —empezó a decir Solón.

—Y a mí otra… —dijo Quilón.

—Y a mí… —gritó Pitaco.

—Y a mí… —exclamó Bías.

—¡Un momento, por favor! —clamó súbitamente un extraño.

Todos se volvieron al escuchar la llamada de atención del extraño que, saliendo del templo, se dirigía sonriente hacia la alborotada reunión.

—Soy Quinótides, profesor de geometría y estoy atascado en un problema. Así que me he dicho: si estos señores son los siete sabios de Grecia, pues bien, me podrían echar una mano. Así que ahí va el enunciado del problema que me tiene loco: "Dadas dos circunferencias concéntricas trazamos una tangente a la interior que corta a la exterior en 2 puntos. La distancia entre cualquiera de estos puntos y el punto de tangencia es 1 m. ¿Puedes hallar el área de la corona circular que determinan las dos circunferencias?"

—Bueno, es facilísimo —dijo Cleóbulo.

—Realmente sencillo —añadió Solón.

—Pero fácil, fácil —indicó Quilón.

—Una tontería —observó Bías.

—Muy simple —aseguró Pitaco—. Ese problema no tiene solución. Para resolver un círculo necesitas un dato. Para resolver la corona circular, necesitas dos datos.

—Elemental, elemental —señaló, muy pedante, Periandro.

—Muy bien —dijo el profesor de geometría y preguntó— Pero ¿cuál es la solución?

—Bueno, yo es que… ahora no tengo tiempo porque estoy puliendo una sentencia preciosa —se disculpó Quilón—, a ver si os gusta: "Que tu lengua no se adelante a tu razón".

Y se despidió de Thales para bajar hacia el centro de Delfos mientras disimulaba, fingiendo estar abstraído en la elaboración de una nueva sentencia.

Los demás, al ver cómo su compañero se quitaba el problema de encima, le siguieron rápidamente fingiendo estar ocupadísimos en pensar sentencias que era a lo que se dedicaban fundamentalmente todos los sabios, menos Thales.

—"Si eres adolescente aplícate en la acción, si eres anciano en la sabiduría". ¿A que está bien esta sentencia? —le preguntó Bías a Periandro, dándole un codazo, mientras continuaban descendiendo hacia el centro de Delfos.

—Sí, pero la mía es mejor —se entrometió Pitaco—. Escuchad: "No cuentes tus proyectos, porque si fracasas se reirán de ti".

—¿Y que me decís de esta: "Cuando hayas aprendido a obedecer, sabrás mandar"? —les preguntó orgulloso, Solón.

—Esta las supera a todas: "En las ocasiones buenas no seas orgulloso y en las malas no te humilles" —dijo Cleóbulo, mirando hacia atrás para ver la cara de estupor del profesor de geometría.

—Y además "Sé previsor en todas las cosas", así que ya sabes "Es mejor morir con dinero ahorrado que vivir necesitado" —añadió Periandro.

—¡Eh, un momento! Eso no vale. No se pueden decir las sentencias de dos en dos —saltó Solón.

—¿Y por qué no? —le preguntó desconcertado Periandro.

—Pues… no lo sé; pero en Atenas somos muy sentenciosos y no presumimos de ello. Yo tengo un montón de sentencias que serán las mejores de la Historia y no voy por ahí diciéndolas de dos en dos.

—Más tengo yo, y tampoco voy presumiendo de ellas. Tengo patentadas más de 200 sentencias —dijo Pitaco.

—¡Y yo más de 300! —exclamó Bías.

Y así, discutiendo quién era el que más sentencias había creado, llegaron lentamente al mesón "Etocse" en el que comenzaría la celebración por el grabado de la sentencia del más conspicuo de los sabios, su colega Thales, recién grabada en el frontón del templo.

Y allí seguían discutiendo y gritando "Y yo más, y yo más" cuando entraron Thales y Quinótides, contentos de haber resuelto el problema de la corona circular.

—Por suerte, estabas tú —le dijo Quinótides a Thales—, "ya que tus amigos, muy sabios, pero se sacaron el problema con la excusa de las sentencias.

—Suerte que me encontraste —dijo Thales a Quinotides—, ya que Pitágoras todavía no nació, y si Pitágoras no quisiera ayudarte, tendrías que esperar hasta el tercer milenio y consultar con la Ingeniera Eleonora que ya lo resolvió.

—¿Cómo sabes estas cosas maestro? —le preguntó perplejo Quinótides.

—Pitágoras de Samos…, Eleonora de Argentum… son recuerdos del futuro querido profesor.

—¿Qué tal, mis queridos colegas? —preguntó Thales mientras ingresaba al mesón— Ya veo que seguís dándole vueltas a la importancia de sus propias sentencias y apotegmas, pero yo me pregunto, ¿no tenéis curiosidad por saber el resultado del problema de las dos circunferencias?

Nadie respondió y todos siguieron con la discusión por saber quién era el de mayor cantidad de sentencias. Hicieron de cuenta que no lo escucharon a Thales.

Entonces Thales les dijo: —Pues vais a tener vuestro justo castigo. Escuchad: las autoridades de Delfos para festejar el grabado de mi sentencia en el templo de Apolo nos invitaban a este ágape. Y he dicho bien "nos invitaban" porque les he propuesto que utilicen el dinero para que erijan una estatua al auriga vencedor de la próxima carrera de caballos, que espero sea más rápido que el de Solón y Bías y menos pretencioso que el burro de las zanahorias. Seguro que esta escultura se hará famosísima y se la conocerá como "El auriga de Delfos". Y las autoridades aceptaron la propuesta.

—¿Y quién pagará el ágape? —preguntaron aterrados los seis sabios al unísono.

—El último en resolver este problema, tomad nota e intentad resolverlo por separado: "Al intercambiar los dígitos de un número de 3 cifras de modo que ningún dígito quede en su posición original, resultarán 2 número de 3 cifras. Al restar el número viejo menos el número nuevo, resultará un número de 2 cifras que es cuadrado perfecto. Hallar todos los resultados posibles".

—Pero… —iba a protestar Cleóbulo.

—¡Pero nada! —exclamó Thales— Mucha sentencia, mucha sentencia y no eres digno de ellas. Ni tú ni tus amigos.

—Vamos a ver —siguió Thales—. Cleóbulo, tú mucho dices "La moderación es la cosa mejor" y eres un inmoderado que abusa de la comida y la bebida y de otros placeres que el decoro me impide nombrar. Y tú no te rías, Solón, ya que predicas que "Nada en demasía" y estoy viendo que se te ha ido la mano en el vino. Y tú lo mismo, Quilón, que mucho decir "Cuando bebas guárdate de hablar mucho, pues cometerás faltas" y veo la jarra de tinto que ya está vacía a tu lado. Y tú, Pitaco, mucho decir "Devuelve lo que se te haya confiado" y todavía no me has devuelto la lira que te presté para el

cumpleaños de tu hija y aun me debes 80 monedas de plata desde hace dos años. Y a ver si prestas atención, Bías, que tu sentencia preferida es "Sé un oyente complaciente" y no estás haciendo ni caso. Y no digamos, Periandro, que de tanto repetir "El descanso es cosa buena" no pega golpe en casa, que me lo ha dicho su mujer. Así que, calladitos y a trabajar. Vamos.

Thales dio dos sonoras palmadas como punto final a su largo y acusador discurso y sirvió dos copas de vino para él y para su amigo Quinótides, mientras observaba cómo sus colegas, avergonzados, empezaban a hacer sus cálculos, aterrados ante la posibilidad de tener que pagar la cuenta que seguro, como en el problema, ascendería a un número de tres cifras.

—Está bien esto de las sentencias —dijo el profesor de geometría, compadeciéndose de los sabios y tratando de simpatizar con ellos.

—Ya lo creo —dijo Thales con su ánimo claramente más sereno—. Además, mis seis amigos sabios y yo esramos muy contentos ya que a finales del siglo IV a. de C., más o menos, Demetrio de Fáleros, que será discípulo de mi discípulo Aristóteles, recogerá todas nuestras sentencias para que pasen a la posteridad y se puedan leer hasta por Internet.

—¿Y en qué trabajas ahora, querido maestro?

—Pues acabo de determinar el número exacto de días que tiene un año y un método infalible para que los marinos se guíen en sus peligrosas travesías utilizando la constelación de la Osa Mayor.

—¡Qué maravilla! —exclamó Quinótides.

—Pues eso no es nada; ahora estoy muy entretenido con sacar adelante un teorema que se llamará, por supuesto, el teorema de Thales, que para eso lo estoy inventando yo. Es que aquí hay que ponerle tu nombre a todo, que luego cualquiera de estos –y señaló a sus seis colegas que se devanaban los sesos tratando de resolver el problema- se lo adjudica. Aunque mi problema mayor es el agua ya que "El principio original de todas las cosas es el agua, de la que todo procede y a la que todo vuelve". Y el mesonero que nos ha servido este vino debe de estar de acuerdo con este principio, porque tienes que reconocer que lo ha bautizado en exceso. Este mesonero debe creerse de Argentum, un país del sur del continente con el que tropezará don Cristóforo, dentro de 2.000 años. Así que vamos a otro mesón a ver si encontramos mejor vino y a lo mejor, con un poco de suerte, mejores sabios.

—¿Quién es don Cristóforo? —preguntó Quinótides.

—Pues todavía no es —le dijo Thales—. Este navegante genovés recién asomará sobre la faz de la tierra antes del Renacimiento. Y se hará llamar Colombo. Luego descubrirá que la Tierra es redonda (en realidad se apropiará del descubrimiento del pobre Eratóstenes). Convencerá a los reyes de la Hispania para que le financien un viaje a las Indias. Por suerte para él se encontrará con el continente que ya te dije.

—¿De Argentum el mesonero? —siguió preguntando Quinótides con notoria curiosidad— Ya habías mencionado ese sitio en oportunidad de las circunferencias concéntricas.

—Pues sí, Quinótides —respondió Thales— Ese país donde se creen los más listos del mundo. Los más listos y los mejores del mundo.

Y Thales y Quinótides salieron del mesón dejando a los seis sabios enfrascados, y no como el vino, precisamente, en otra discusión ya que ninguno avanzaba en la resolución del problema del número de tres cifras.

—¿Qué te ocurre Quinótides? Te noto preocupado —le preguntó Thales a su amigo, ya fuera del mesón, en la claridad del aire libre y el cielo azul.

—Ustedes, los sabios de Grecia son famosos y serán siempre recordados, mientras que yo caeré en el olvido para la eternidad. ¿Podrías hacer algo por mí para que sea famoso y recordado?

—¡No te preocupes, Quinótides! Serás recordado como el profesor de Geometría de la antigua Grecia que inspiró el talento de un tal Thales para que resuelva el problema de la corona circular antes del nacimiento de Pitágoras. Y seguramente estaremos nombrados en el prefacio de un libro que será escrito por un profesor de matemática o ingeniero o algo así en Argentum a mediados del primer tercio del tercer milenio.

—¡Pero el tercer milenio ya pasó! ¿Qué es un libro?

—El que ya pasó es el tercer milenio a.C. Estamos aproximadamente a 500 años de la llegada de El Salvador, el Cristo que se llamará Jesús (que dividirá la historia antes y después de él) y a 2500 años de ser nombrados y reconocidos en ese libro que te hablé, que ahora está en manos de quien lo está leyendo, que por suerte así se llamará el compendio de folios prolijamente encuadernados. Ahora los escritos los hacemos sobre los papiros que traemos de Egipto y los enrollamos en delicados teucos.

Nota 1: Cuentan los que conocieron esta historia que luego de esta conversación, Quinótides fue feliz por el resto de sus días y Thales de Mileto también.

Nota 2: Demetrio de Fáleros cuenta también que ninguno de los seis sabios logró resolver el problema, así que, maldiciendo a Thales, decidieron pagar la cuenta del ágape a Escote (que así se llamaba el mesonero).

Nota 3: Quinótides, que se enteró de la maldición a Thales, se animó a presagiar la maldición sobre el autor que echarán los lectores de ese libro que mencionó Thales, porque no podrán resolver ninguno de los 3 problemas planteados en esta historia.

Nota 4: Cuando Thales se enteró del presagio de Quinótides, ya había escrito el teorema que lleva su nombre y que dice: "Si tres o más sabios son atravesados por las transversales de la inspiración y la imaginación, las sentencias para guiar la conducta humana surgidas sobre la inspiración son directamente proporcionales a las correspondientes a la imaginación".

CAPÍTULO I

GEOMETRÍA PLANA

CAPÍTULO I
GEOMETRÍA PLANA

Euclides

Aproximadamente hace 2400 años, Euclides de Alejandría (330 a.C.-275 a.C.) escribió los *Elementos*, hasta hace poco mundialmente utilizado como el libro de texto de geometría. El expresidente de Estados Unidos, Abraham Lincoln, estudió este libro para agudizar su mente y de verdad entender la deducción matemática. Incluso hoy en día, sigue siendo la base de lo que consideramos un primer curso en geometría. Esta lección da un poco de contexto sobre los *Elementos* y luego sienta las bases conceptuales de puntos, líneas, círculos y planos, conceptos que usaremos en nuestro viaje a través del mundo de Euclides.

Junto con Arquímedes y Apolonio de Perga, posteriores a él, Euclides fue pronto incluido en la tríada de los grandes matemáticos de la Antigüedad. Sin embargo, a la luz de la inmensa influencia que su obra ejercería a lo largo de la historia, hay que considerarlo también como uno de los más ilustres de todos los tiempos.

Euclides ha sido un gran compilador del saber matemático griego. Su gran mérito reside en su labor de sistematización: partiendo de una serie de definiciones, postulados y axiomas, estableció por rigurosa deducción lógica todo el armonioso edificio de la geometría griega. Juzgada como uno de los más altos productos de la razón humana, la geometría euclidiana mantendría su vigencia durante más de veinte siglos, hasta la aparición, ya en el siglo XIX, de las llamadas *geometrías no euclidianas*.

Biografía

Poco se conoce a ciencia cierta de la biografía de Euclides, pese a ser el matemático más famoso de la Antigüedad. Es probable que se educara en Atenas, lo que permitiría explicar su buen conocimiento de la geometría elaborada en la escuela de Platón.

Euclides enseñó en Alejandría, donde abrió una escuela que acabaría siendo la más importante del mundo helénico, y alcanzó un gran prestigio en el ejercicio de su magisterio durante el reinado de Ptolomeo I Sóter, fundador de la dinastía ptolemaica que gobernaría Egipto desde la muerte de Alejandro Magno hasta la ocupación romana. Se cuenta que el rey lo requirió para que le mostrara un procedimiento abreviado para acceder al conocimiento de las matemáticas, a lo que Euclides repuso que no existía una vía regia para llegar a la geometría. Este epigrama, sin embargo, se atribuye también al matemático Menecmo, como réplica a una demanda similar por parte de Alejandro Magno.

La tradición ha conservado una imagen de Euclides como hombre de notable amabilidad y modestia, y ha transmitido asimismo una anécdota relativa a su enseñanza, recogida por Juan Estobeo: un joven principiante en el estudio de la geometría le preguntó qué ganaría con su aprendizaje. Euclides le explicó que la adquisición de un conocimiento es siempre valiosa en sí misma; y dado que el muchacho tenía la pretensión de obtener algún provecho de sus estudios, ordenó a un sirviente que le diera unas monedas.

Los *Elementos* de Euclides

Euclides fue autor de diversos tratados, pero su nombre se asocia principalmente a uno de ellos, los *Elementos*, que rivaliza por su difusión con las obras más famosas de la literatura universal, como la Biblia o el *Quijote*. Se trata, en esencia, de una compilación de obras de autores anteriores (entre los que destaca Hipócrates de Quíos).

De los trece libros que la componen, los seis primeros corresponden a lo que se entiende todavía como geometría plana o elemental. En ellos Euclides recoge las técnicas geométricas utilizadas por los pitagóricos para resolver lo que hoy se consideran ejemplos de ecuaciones lineales y cuadráticas; se incluye también la teoría general de la proporción, atribuida tradicionalmente a Eudoxo.

Los libros del séptimo al décimo tratan de cuestiones numéricas: las principales propiedades de la teoría de los números (divisibilidad, números primos), los conceptos de conmensurabilidad de segmentos a sus cuadrados y las cuestiones relacionadas con las transformaciones de los radicales dobles. Los tres restantes se ocupan de la geometría de los sólidos, hasta culminar en la construcción de los cinco poliedros regulares y sus esferas circunscritas, que habían sido ya objeto de estudio por parte de Teeteto.

De las restantes obras de Euclides sólo poseemos referencias o breves resúmenes de comentaristas posteriores. Los tratados sobre los *Lugares superficiales* y las *Cónicas* ya contenían, al parecer, algunos de los resultados expuestos posteriormente por Apolonio de Perga. En los *Porismas* se desarrollan los teoremas geométricos denominados actualmente de tipo proyectivo; de esta obra sólo conservamos el resumen trazado por Pappo de Alejandría. En *Óptica* y *Catóptrica* se estudiaban las leyes de la perspectiva, la propagación de la luz y los fenómenos de reflexión y refracción.

Dos mil años de vigencia

La influencia posterior de los *Elementos* de Euclides fue decisiva; tras su aparición, se adoptó de inmediato como libro de texto ejemplar en la enseñanza inicial de la

matemática, con lo cual se cumplió el propósito que debió de inspirar a Euclides. Tras la caída del Imperio Romano, su obra fue preservada por los árabes y de nuevo ampliamente divulgada a partir del Renacimiento.

Más allá incluso del ámbito estrictamente matemático, Euclides fue tomado como modelo, en su método y exposición, por autores como Galeno, para la medicina, o Spinoza, para la ética. También filósofos y científicos de todas las épocas tuvieron en mente el admirable rigor lógico de la geometría de Euclides.

De hecho, Euclides estableció lo que había de ser la forma clásica de una proposición matemática: un enunciado deducido lógicamente a partir de unos principios previamente aceptados. En el caso de los *Elementos*, los principios que se toman como punto de partida son veintitrés definiciones, cinco postulados y cinco axiomas o nociones comunes.

La naturaleza y el alcance de dichos principios han sido objeto de frecuente discusión a lo largo de la historia, en especial por lo que se refiere a los postulados y, en particular, al quinto postulado, llamado de las paralelas. Según este postulado, por un punto exterior a una recta sólo puede trazarse una paralela a dicha recta. Su condición distinta respecto de los restantes postulados fue ya percibida desde la misma Antigüedad, y hubo diversas tentativas de demostrar el quinto postulado como teorema.

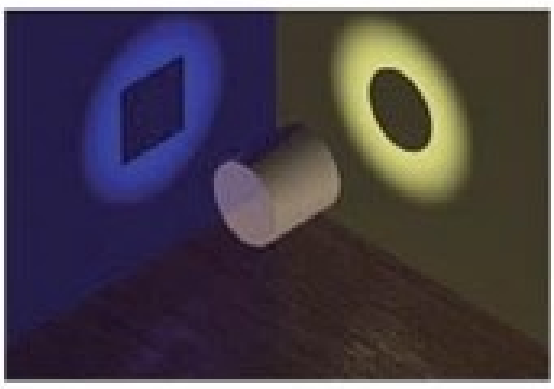
Los esfuerzos por hallar una demostración resultaron infructuosos y prosiguieron hasta el siglo XIX, cuando algunos trabajos inéditos de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) y las investigaciones del matemático ruso Nikolai Lobachevski (1792-1856) evidenciaron que era posible definir una geometría perfectamente consistente (la geometría hiperbólica) en la que no se cumplía el quinto postulado. Se iniciaba así el desarrollo de las geometrías no euclidianas, de entre las que destaca la geometría elíptica del matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866), juzgada por Albert Einstein como la que mejor representa el modelo de espacio-tiempo relativista.

Los axiomas de la geometría son:

- Punto
- Recta
- Plano
- Espacio

Fundamentos de diseño

En todo diseño se tienen en cuenta lo conceptual y lo visual. Son elementos conceptuales aquellos que no son visibles: el **punto, la línea, el plano y el volumen**. Cuando los elementos conceptuales se hacen visibles, adquieren forma.



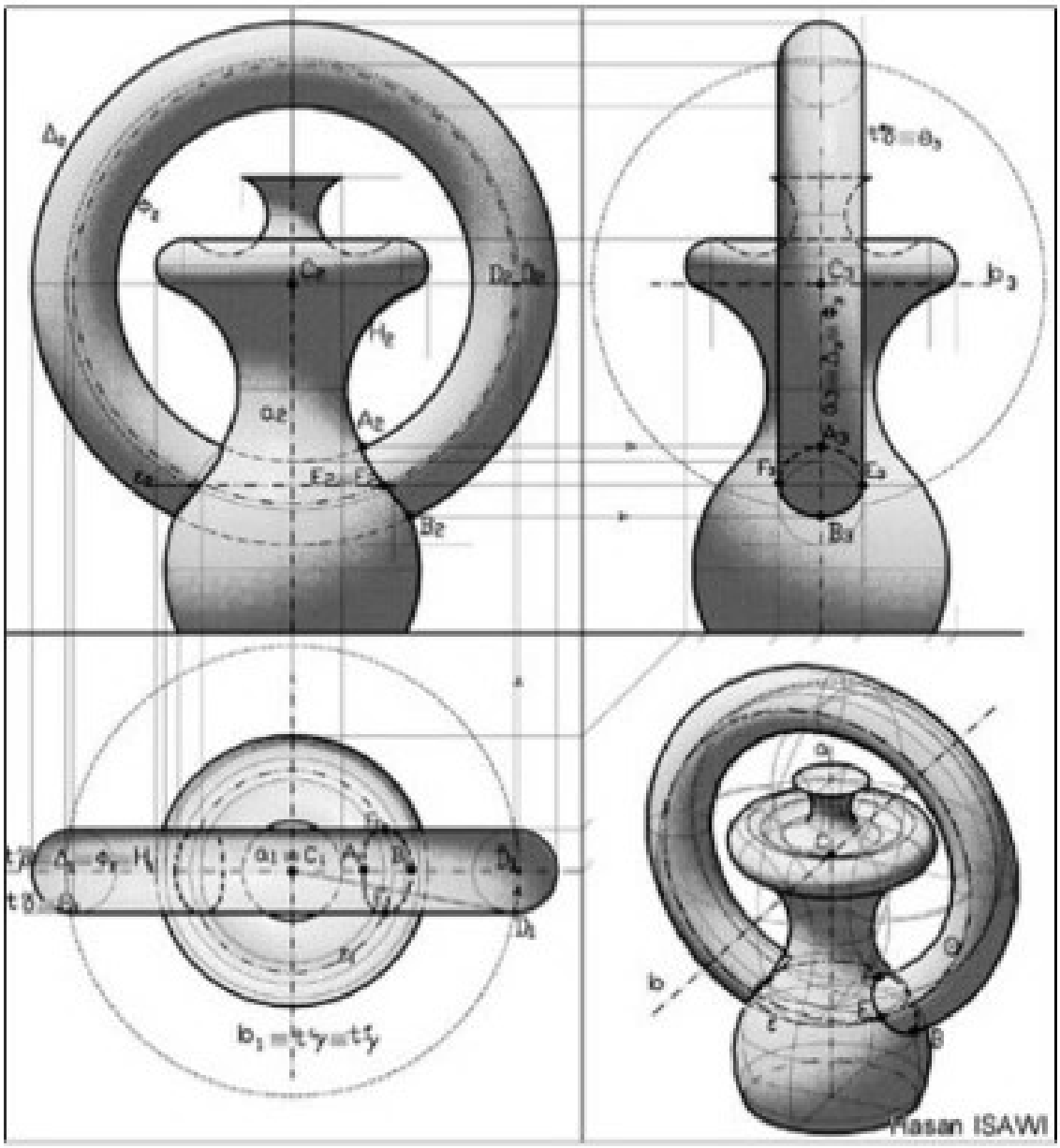
Cilindro proyectado en dos planos

Geometría descriptiva

La geometría descriptiva es un conjunto de técnicas geométricas que permite representar el espacio tridimensional sobre una superficie bidimensional. Por tanto, mediante una «lectura» adecuada, posibilita resolver problemas espaciales en dos dimensiones de modo que se garantiza la reversibilidad del proceso.

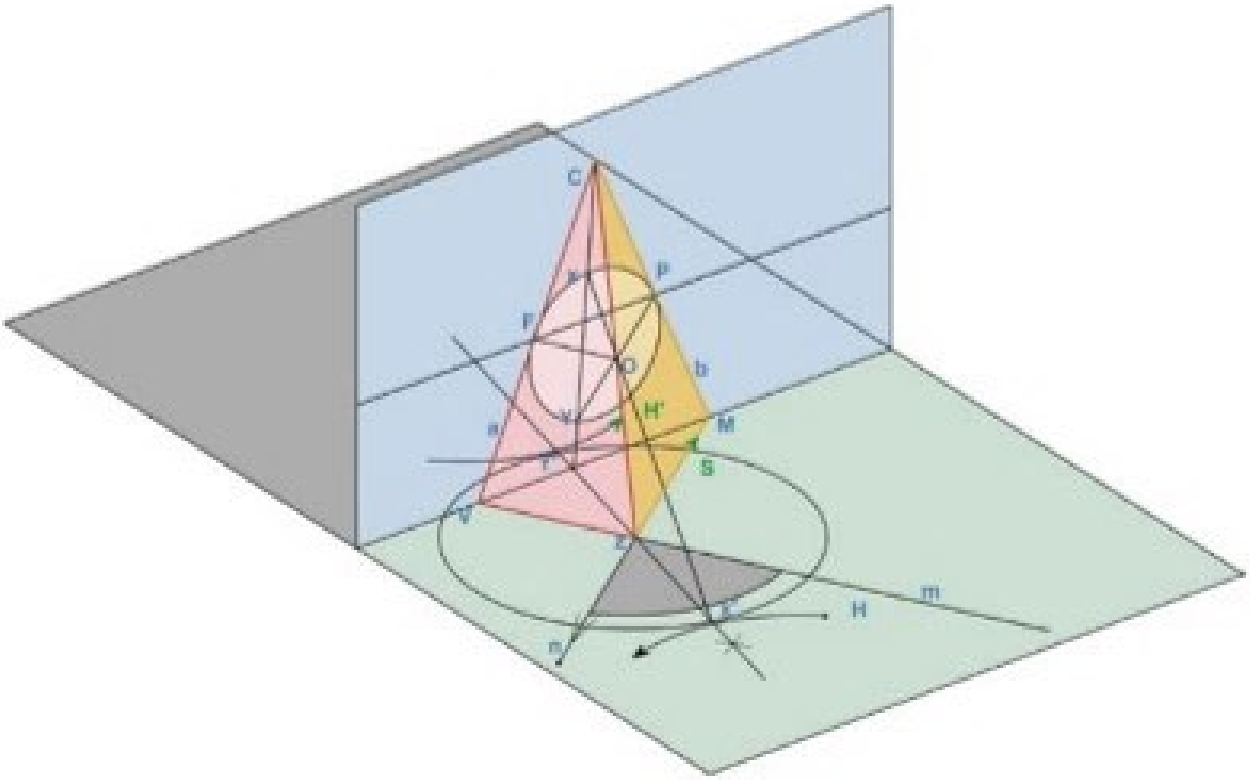
En la época actual se reconocen dos modelos, en los cuales se les considera:

1) «Lenguaje» de representación y de sus aplicaciones; 2) tratado de geometría. Aunque no es exactamente lo mismo, su desarrollo ha estado relacionado con el de la Geometría proyectiva.



Cuatro representaciones bidimensionales (2D) del mismo objeto tridimensional (3D). Dos vistas, una planta y una perspectiva.

Se debe observar la correspondencia de trazos en las vistas y la planta.



Un poco de historia

La geometría proyectiva ha tenido su época de desarrollo en el siglo XIX y a principios del siglo XX, aunque algunos de sus resultados ya eran conocidos desde mucho antes.

Podemos citar a Menelao, quien entre los años 200-400 aproximadamente hace un profundo estudio sobre triángulos esféricos, completado por Ptolomeo, quien también desarrolla el estudio de proyecciones para la construcción de cartas geográficas.

La época siguiente corresponde a los trabajos de Diofanto y Pappus. El principal problema de Pappus, también conocido como lugar determinado por 3 o 4 rectas, pide: dadas 3 rectas de un plano, hallar el lugar geométrico de los puntos P que se mueven de tal manera que el cuadrado del segmento PA, trazado con un ángulo fijo a una de las rectas, es proporcional al producto de los segmentos PB y PC, trazados a las otras dos con el mismo ángulo.

Apolonio, el gran geómetra, ya había estudiado el problema. Pappus prueba que, en todos los casos, el lugar geométrico es una cónica; y extiende el problema a 6 rectas. No puede analizar el problema para 8 rectas, ya que aparecería entonces un producto de 4 segmentos, que no tiene significado geométrico; el de 3 es un volumen. Pappus también trabaja las relaciones entre foco y directriz.

La geometría proyectiva reaparece con la mirada propia de los artistas y arquitectos del Renacimiento, quienes en su búsqueda de una fundamentación matemática para la teoría de perspectiva (representación bidimensional de objetos tridimensionales), trabajaron sobre conceptos geométricos como secciones y proyecciones: Piero Della Francesca (1410-1492); Leone Battista Alberti (1404-1472); Leonardo Da Vinci (1452-1519) y Alberto Durero (1471-1528). Alberto Durero, pintor, publica un libro

llamado *Introducción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas*. El libro tiene algunas justificaciones, aunque está pensado esencialmente para artistas. El estudio de propiedades geométricas invariantes por proyectividades surge de algunos problemas de perspectiva, ya estudiados, por ejemplo, por Leonardo Da Vinci.

La mirada científica viene de la mano de Galileo (1564-1642) que analiza curvas como la cicloide y la catenaria, y conjetura acertadamente que el área de la cicloide es el triple de la del círculo que la genera, pero se equivoca al identificar ambas curvas (la cicloide y la catenaria). También de Kepler (1571-1630), quien dio su nombre al foco. Kepler introduce la idea del principio de continuidad unificado, que permite definir las cónicas a partir del movimiento de uno de los focos.

El matemático francés Gérard Desargues (1591-1661), arquitecto e ingeniero militar de Lyon, introdujo este tipo de métodos en su estudio de las cónicas. Sus desarrollos de las nociones proyectivas fundamentales y de los nuevos métodos de demostración (ahora válidos para todas las cónicas, a diferencia de los griegos que tenían métodos distintos para diferentes casos) generan un avance significativo desde la época de Apolonio. Influidos por él, los desarrollos son continuados por Blaise Pascal (1623-1662) y Philippe de Hire (1649-1718).

Blaise Pascal (1623-1662) publicó a los 16 años su *Ensayo para las cónicas*, donde desarrolla el hexagrama místico, hoy conocido como teorema de Pascal. Aparece entonces la geometría descriptiva con Gaspard Mongue (1746-1818), que trabaja esencialmente en la proyección bidimensional de objetos tridimensionales y logra despertar un nuevo interés por la geometría en Francia.

Se desarrolla la geometría proyectiva con Carnot (1785-1823), Victor Poncelet (1778-1867), Charles (1793-1880); que se extiende rápidamente a otros países europeos con Moebius (1790-1868), Steiner (1790-1863), Staudr (1798-1867) y Cayley (1821-1895).

Cabe señalar que un estudio sistemático en este sentido recién fue realizado a fines del siglo XVIII, cuando un oficial francés, J.V. Poncelet (1788-1867), escribió su famoso *Traité des propriétés projectives des figures* en 1813, siendo prisionero de guerra en Rusia.

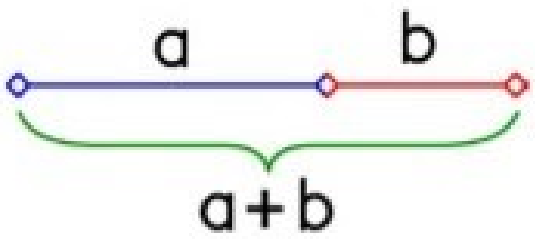
Finalmente, en el siglo XIX, aparecen las geometrías no euclidianas de la mano de Karl F. Gauss (1777-1855), Janos Bolyai (1802-1860) y Lobachevski (1793-1856), quienes desarrollaron una geometría en que por un punto exterior a una recta pasan dos paralelas a esta; y Riemann (1826-1866) que desarrolla la geometría propia.

La prueba de indemostrabilidad del 5° postulado de Euclides recién la lograrán Beltrami (1835-1900) y Klein (1849-1925). La idea de clasificar las propiedades geométricas según clases de transformaciones fue propuesta por Felix Klein.

Ya Galois (1811-52) había entrevisto la idea de grupo como algo importante en los desarrollos algebraicos, pero la idea de englobar las distintas geometrías usando esta noción fue desarrollada por Christian Felix Klein (1849-192) en su programa de Erlangen.

Para captar la esencia del programa de Erlangen, pensemos en un proyector de imágenes que, puesto en una determinada posición, permite captar una imagen ampliada de la figura original. Si movemos la pantalla, obtendremos deformaciones, pero como siempre transforma rectas en rectas, tendrá invariantes proyectivos (es decir, las transformaciones son colineaciones, que conservan las razones dobles).

Cálculo del valor del número áureo (número de oro)



Dos números *a* y *b* están en proporción áurea si se cumple:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Si φ es igual a **a/b**, entonces la ecuación queda:

$$1 + \varphi^{-1} = \varphi$$

Multiplicando ambos miembros por φ, obtenemos:

Igualamos a cero:

$$\varphi + 1 = \varphi^2$$
$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

La solución positiva de la ecuación de segundo grado es:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803398874989...$$

...que es el valor del número áureo, equivalente a la relación **a/b**.

Se trata de un número algebraico irracional (su representación decimal no tiene período) que posee muchas propiedades interesantes y que fue descubierto en la antigüedad, no como una expresión aritmética, sino como relación o proporción entre dos segmentos de una recta; o sea, una construcción geométrica. Esta proporción se encuentra tanto en algunas figuras geométricas como en la naturaleza: en las nervaduras de las hojas de algunos árboles, en el grosor de las ramas, en el caparazón de un caracol, en los flósculos de los girasoles, etc.

Asimismo, se atribuye un carácter estético a los objetos cuyas medidas guardan la proporción áurea. Algunos incluso creen que posee una importancia mística.

A lo largo de la historia, se ha atribuido su inclusión en el diseño de diversas obras de arquitectura y otras artes, aunque algunos de estos casos han sido cuestionados por los estudiosos de las matemáticas y el arte.

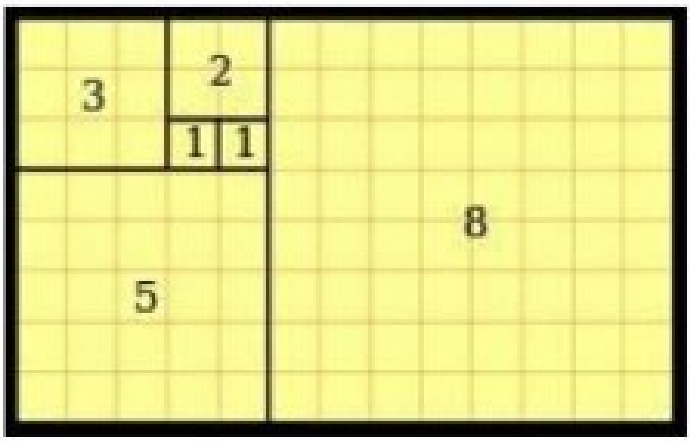
El número áureo en la naturaleza

Concha de nautilus en espiral logarítmica.

En la naturaleza, hay muchos elementos relacionados con la sección áurea y/o los números de Fibonacci:

- La disposición de los pétalos de las flores (el papel del número áureo en la botánica recibe el nombre de Ley de Ludwig). La distribución de las hojas en un tallo. Ver: Sucesión de Fibonacci.
- La relación entre las nervaduras de las hojas de los árboles. La relación entre el grosor de las ramas principales y el tronco, o entre las ramas principales y las secundarias (el grosor de una equivale a Φ tomando como unidad la rama superior).
- La cantidad de espirales de una piña (ocho y trece espirales), flores o inflorescencias. Estos números son elementos de la sucesión de Fibonacci y el cociente de dos elementos consecutivos tiende al número áureo.
- La distancia entre el ombligo y la planta de los pies de una persona, respecto a su altura total.
- La cantidad de pétalos en las flores. Existen flores con 3, 5 y 8 pétalos y también con 13, 21, 34, 55, 89 y 144.
- La distribución de las hojas de la yuca y la disposición de las hojas de las alcachofas.
- La relación entre la distancia entre las espiras del interior de cualquier caracol o de cefalópodos como el nautilus. Hay por lo menos tres espirales logarítmicas más o menos asimilables a proporciones áureas.
- En la cantidad de elementos constituyentes de las espirales o dobles espirales de las inflorescencias, como en el caso del girasol, y en otros objetos orgánicos como las piñas de los pinos se encuentran números pertenecientes a la sucesión de Fibonacci.
- El cociente de dos números sucesivos de esta sucesión tiende al número áureo.
- Los machos de una colmena de abejas tienen un árbol genealógico que sigue la serie de Fibonacci.

La sección áurea (sucesión de oro) y la serie de Fibonacci



1+1 = 2
2+1 = 3
3+2 = 5
5+3 = 8
8+5 = 13
13+8 = 21

Rectángulo proporcional

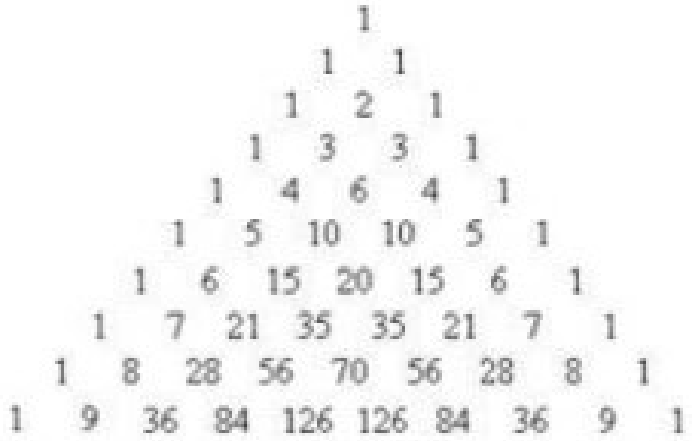
El número áureo y la sección áurea están presentes en todos los objetos geométricos regulares o semirregulares en los que haya simetría pentagonal, pentágonos o aparezca de alguna manera la raíz cuadrada de cinco.

El triángulo de Pascal y la sucesión de Fibonacci

El triángulo de Pascal (también conocido como *triángulo de Tartaglia*) es un triángulo formado por números enteros que es bien conocido por gran cantidad de gente al aparecer en los libros de texto desde secundaria en adelante. De todas formas, vamos a ver cómo se construye:

Construcción del triángulo de Pascal

Colocamos un 1 en el vértice superior del triángulo. Después, en la fila inferior, colocamos un 1 a la derecha y un 1 a la izquierda del 1 de arriba. En la inferior colocamos un 1 a cada extremo y entre los dos unos colocamos un 2 (1 + 1). En la inferior un 1 en cada extremo y en medio un 3 entre el 1 y el 2 (1 + 2) y otro 3 entre el 2 y el 1 (2 + 1). Y así sucesivamente: en los extremos un 1 a cada lado y en las posiciones intermedias colocamos la suma de los números de arriba. Queda una cosa así:



Su aplicación más importante es la siguiente: **cada fila del triángulo representa los coeficientes de los monomios que aparecen en el desarrollo del binomio** $(a + b)^n$ (tomando el 1 de arriba como la potencia n = 0), o lo que es lo mismo, **los coeficientes que aparecen en el binomio de Newton coinciden con los elementos que aparecen en cada fila del triángulo de Pascal**. Una propiedad realmente interesante.

Este número y la sucesión de Fibonacci están íntimamente relacionados, ya que es el límite de la sucesión formada por los cocientes de cada elemento de la sucesión y el inmediatamente anterior.

Construcción de la sucesión de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci se construye de la siguiente forma:

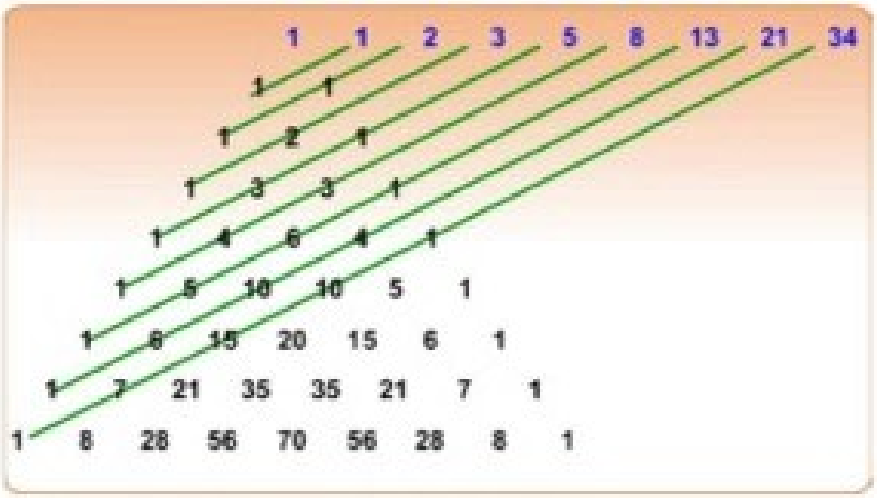
$$F(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0; \\ 1, & \text{si } n = 1; \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{si } n > 1; \end{cases}$$

Es decir, su primer elemento es el 0, el siguiente el 1, y de ahí en adelante cada elemento es la suma de los dos anteriores. Por tanto, los primeros elementos son:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89...

Relación entre ellos

En principio, estos dos objetos matemáticos no tienen demasiada relación. Pero en realidad sí la tienen. Tanto la sucesión de Fibonacci como el número de oro aparecen en multitud de lugares, tanto matemáticos como reales. Y el triángulo de Pascal no iba a ser una excepción. ¿Cómo encontrar los elementos de la sucesión de Fibonacci en el triángulo de Pascal? Pues de esta forma:



Realmente es sorprendente cómo dos cosas que en principio no tienen mucha relación puedan converger de esta manera.

Y, para terminar, les dejo algunas de las propiedades que tiene el triángulo de Pascal:

- Si sumamos los elementos de cada fila obtenemos las potencias de 2: 1, 2, 4, 8, 16…
- Si tomamos cada fila como un número obtenemos los múltiplos de 11: 1, 11, 121, 1331, 14641…
- Si sumamos dos elementos consecutivos de la diagonal 1-3-6-10-15-… obtenemos un cuadrado perfecto: 1, 4, 9, 16, 25…
- Si en una fila el primer número después del 1 es un número primo se cumple que todos los demás números son divisibles por ese número primo (excluyendo los 1, claro está). Por ejemplo, en la fila 1-7-21-35-35-21-7-1, el primer número después del 1 es el 7, que es primo. Si nos fijamos en el resto de los números, 35, 21 y 7, todos son divisibles por 7.

Phi y la arquitectura

La sección áurea se usó mucho en el Renacimiento, particularmente en las artes plásticas y la arquitectura. Se consideraba la proporción perfecta entre los lados de un rectángulo.

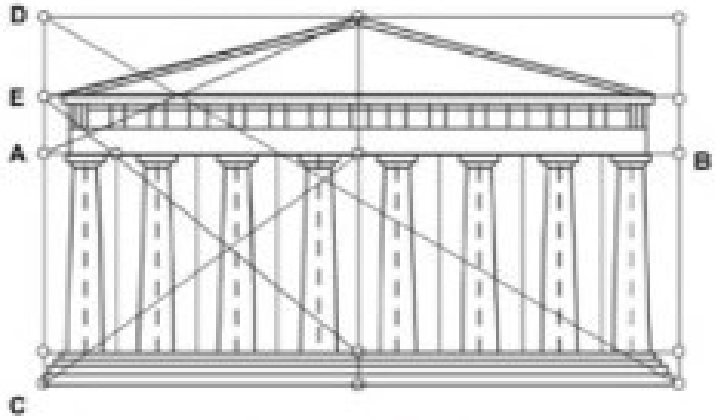
En la antigua Grecia se utilizó para establecer las proporciones de los templos, tanto en su planta como en sus fachadas. En el Partenón, Fidias lo utilizó en la composición de las esculturas. Los arquitectos la utilizaban para crear edificios de excelente simetría.

A continuación, veremos en qué otros monumentos se destaca el número áureo.

1. El Partenón

El Partenón fue mandado a construir por Pericles en honor de la diosa Atenea. Su realización fue encargada a los arquitectos Calícrates e Ictinios bajo la supervisión artística del maestro Fidias entre los años 447 y 432 a.C.

Fidias utilizó en la construcción su conocimiento de la belleza y armonía inherentes al número áureo para fijar las dimensiones de todo el edificio y situar los detalles escultóricos.



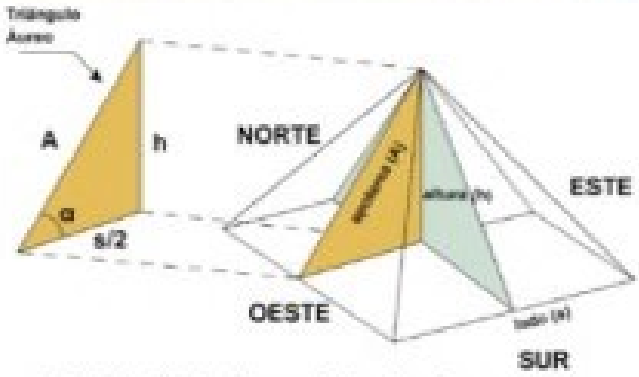
En la figura se puede comprobar que AB/CD=FI. Hay más cocientes entre sus medidas que dan el número áureo, por ejemplo: AC/AD=FI y CD/CA=FI.

2. Pirámide de Keops

La pirámide de Keops es la más grande de las tres pirámides de la meseta de Giza, a las afueras de El Cairo (Egipto). Es la única de las Siete Maravillas del Mundo antiguo que aún sigue en pie. El primer uso conocido del número áureo en la construcción aparece en la pirámide de Keops, que data del 2600 a.C.

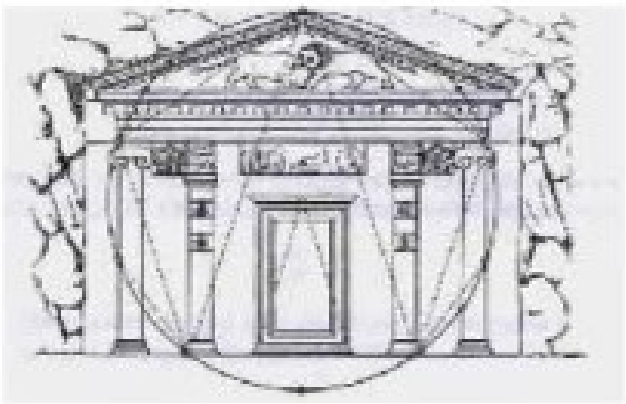
Fue ordenada a construir por el faraón de la cuarta dinastía del Antiguo Egipto Keops. El arquitecto de dicha obra fue Hemiunu.

Esta pirámide tiene cada una de sus caras formadas por dos medios triángulos áureos, el cociente entre la apotema lateral y la altura es igual a Phi.



Pirámide diseñada con triángulos áureos

3. Tumba Rupestre de Mira



La construcción de la Tumba Rupestre de Mira en Asia Menor. Se basa en un pentágono áureo, en el que el cociente de la diagonal y el lado de dicho pentágono es el número áureo.

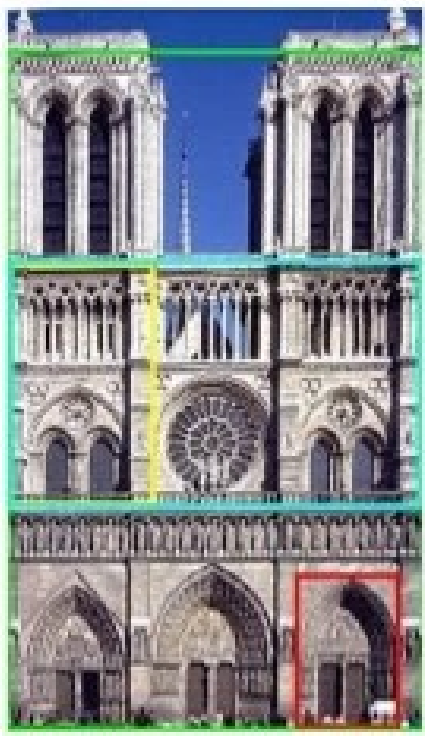
4. El Templo de Ceres

El Templo de Ceres en Paestum (460 a.C.) tiene su fachada construida siguiendo un sistema de triángulos áureos, al igual que los mayores templos griegos, relacionados, sobre todo, con el orden dórico.

5. El Edificio de la ONU

En la arquitectura moderna sigue usándose. Está presente en el conocido edificio de la ONU en New York, el cual no es más que un gran prisma rectangular cuya cara mayor sigue las proporciones del número áureo.

Fue construido en Nueva York entre 1949 y 1950. El arquitecto director del complejo fue Wallace Harrison. El proyecto pertenece al suizo Charles Le Corbusier.



Pero no solo se han encontrado las proporciones áureas en la arquitectura de épocas remotas, sino que Notre Dame también posee las características del número Fi que la hace más armoniosa.

6. Torre Eiffel

Volvemos a encontrarnos con las propiedades divinas del número de oro en la Torre Eiffel en París.

La Torre Eiffel es una construcción de hierro de 300 metros de altura que fue creada para la Exposición Universal de París de 1889. Actualmente constituye el símbolo más representativo de París.

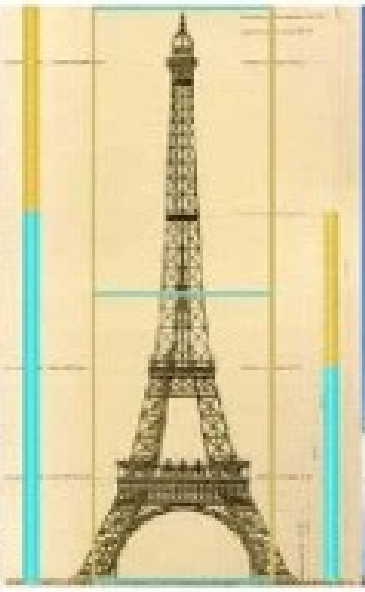
El nacimiento de la torre

Con un diseño creado por Gustave Eiffel, la construcción de la Torre Eiffel duró poco más de dos años y en ella trabajaron 250 obreros.

Inicialmente la torre fue objeto de controversia: los artistas del momento la consideraron monstruosa y, dada su baja rentabilidad al terminar la exposición, se planteó la posibilidad de derruirla en diferentes ocasiones.

A principios del siglo XX, con la llegada de las guerras mundiales, las autoridades encontraron su utilidad como antena de radiodifusión y con ella captaron mensajes que ayudaron a los aliados de forma decisiva.

Actualmente y gracias al auge de París como destino turístico internacional, la Torre Eiffel es el monumento más visitado del mundo con más de 7 millones de visitantes anuales.



7. Escaleras en espirales de Durero

Una de las espirales de Durero más originales y actuales es la de las escaleras del Vaticano que aparecen en la imagen. Esto demuestra que hoy en día también hay estructuras que se basan en el número áureo.

Detalle del Autorretrato de 1498

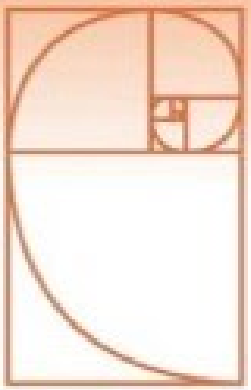
Alberto Durero

(Albrecht Dürer; Nuremberg, actual Alemania, 1471 - id., 1528) Pintor y grabador alemán. Fue sin duda la figura más importante del Renacimiento en Europa.

Como era habitual en la época, al concluir sus estudios realizó un viaje que lo llevó a diversas ciudades de Alemania y a Venecia (1494), ciudad a la que regresaría entre 1505 y 1507 y en la cual recibiría las influencias de Mantegna y Giovanni Bellini, además de asimilar los principios del humanismo. Previamente había contraído matrimonio y abierto un taller en su Nuremberg natal, donde se dedicó a la pintura (Retablo Paumgärtner) y sobre todo al grabado.

A esta época pertenecen las series de grabados *El Apocalipsis*, *La Gran Pasión* y la *Vida de la Virgen*, convencionales en cuanto a temática, pero revolucionarios por lo que se refiere a su concepción y su complejidad técnica. Las figuras, plenas de expresividad, son esculturales y están definidas por una multitud de detalles. La minuciosidad es precisamente uno de los rasgos destacados del estilo de Durero, carácter que es probable que heredara del oficio paterno.

La ley de la colmena y Fibonacci



Los machos de una colmena de abejas tienen un árbol genealógico que cumple con la sucesión de Fibonacci.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...

Un zángano (1), el Macho de la abeja, no tiene padre, pero si que tiene una madre (1, 1), dos abuelos, que son los padres de la reina (1, 1, 2), tres bisabuelos, ya que el padre de la reina no tiene padre (1, 1, 2, 3), cinco tatarabuelos (1, 1, 2, 3, 5, 8) y asi sucesivamente.

El número de plata

En el apartado "Phi y su historia" hemos visto cómo se halla Phi mediante una ecuación de segundo grado. Pues miren ahora esto:

Definición: La razón plateada es un **número irracional** definido por la suma de **1** y la **raíz cuadrada de 2**. Esto es: d = 2,4142...

Ángulos convexos y cóncavos

Definición: "Si intersecamos 2 rectas en el plano, este queda dividido en 4 regiones, cada una de las cuales se llama **ángulo convexo**".

Dado un ángulo convexo, el resto del plano se denomina **ángulo cóncavo.**

Clasificación:

Agudos: Si su medida está comprendida entre 0° y 90°.

Rectos: si su medida es 90°.

Obtusos: Si su medida está comprendida entre 90° y 180°.

Llanos: Si su medida es 180°.

Ángulos Suplementarios: Dos ángulos son suplementarios si suman 180°.

Ángulos Rectos: Si dos ángulos **suplementarios** son adyacentes y tienen la misma medida, entonces cada uno de esos ángulos es recto.

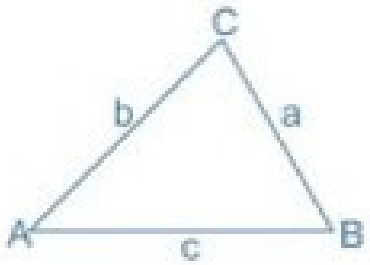
Ángulos Complementarios: Dos ángulos son **complementarios** si suman 90°.

Las figuras geométricas

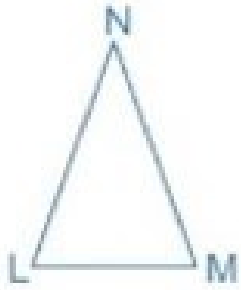
La palabra 'forma' se confunde con 'figura'. No obstante, una forma tridimensional puede tener múltiples figuras bidimensionales cuando se la ve sobre una superficie lisa. La forma es entonces la apariencia visual total de un diseño y se identifica por su figura, tamaño, color y textura. La geometría descriptiva (conjunto de técnicas que permite representar el espacio tridimensional sobre una superficie bidimensional) ha sido la encargada de la representación gráfica en superficies bidimensionales, de resolver los problemas del espacio en los que intervienen puntos, líneas y planos. Mediante proyecciones, traslada los puntos de una figura a una superficie. Tal rama de la geometría resume la teoría del dibujo técnico.

Clasificación de los triángulos por sus lados y sus ángulos

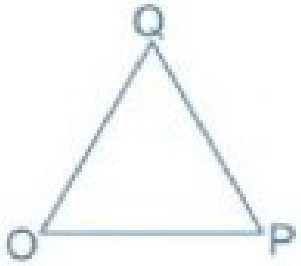
Triángulos Escalenos: No tienen ningún lado igual.



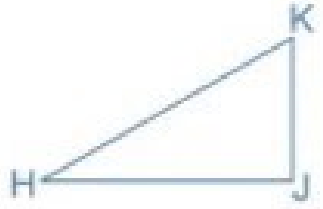
Triángulos Isósceles: Son los que tienen dos lados iguales.



Triángulos Equiláteros: Son los que tienen tres lados iguales.



Acutángulos: Son todos los triángulos con todos los ángulos menores de 90°.
Rectángulos: Uno de sus ángulos es de 90°.



Obtusángulos: Uno de sus ángulos es mayor de 90°.

Alturas de un triángulo

Altura es cada uno de los segmentos perpendiculares trazados desde un vértice al lado opuesto (o su prolongación).

Las figuras geométricas planas

1. **Poligonales**: cóncavas, convexas, regulares, irregulares, etc.
2. **Circulares**: círculo, corona, sector, segmento y trapecio circulares.

En geometría, un polígono es una figura plana compuesta por una secuencia limitada de segmentos rectos consecutivos que cierran una región en el plano. El interior del polígono es llamado área. El polígono es el caso bidimensional del politopo,

figura geométrica general definida para cualquier número de dimensiones. A su vez, un politopo de tres dimensiones se denomina poliedro, y de cuatro dimensiones se denomina policoro.

Elementos de un polígono

En un polígono se pueden distinguir los siguientes elementos geométricos:

- Lado (L): es cada uno de los segmentos que conforman el polígono.
- Vértice (V): es el punto de intersección (punto de unión) de dos lados consecutivos.
- Diagonal (D): es el segmento que une dos vértices no consecutivos.
- Perímetro (P): es la suma de las longitudes de todos los lados del polígono.
- Ángulo interior (AI): es el ángulo formado, internamente al polígono, por dos lados consecutivos.
- Ángulo exterior (AE): es el ángulo formado, externamente al polígono, por un lado y la prolongación de un lado consecutivo.
- Interior de un polígono es el conjunto de todos los puntos que están en el interior de la región que delimita dicho polígono. El interior es un *abierto* del plano.
- Exterior de un polígono es el conjunto de los puntos que no están en la poligonal (frontera) ni en el interior. El exterior es un abierto del plano.

Si el complemento (exterior) de una región poligonal es inconexo, este constará de varios fragmentos conexos llamados componentes. Uno y solo uno de los componentes es ilimitado; todos los demás son limitados, a estos últimos se llaman huecos. Cada hueco con su frontera es un polígono. En un polígono regular se puede distinguir, además:

- Centro (C): es el punto equidistante de todos los vértices y lados.
- Ángulo central (AC): es el ángulo formado por dos segmentos de recta que parten del centro a los extremos de un lado.
- Apotema (a): es el segmento que une el centro del polígono con el centro de un lado; es perpendicular a dicho lado.
- Número de diagonales totales, en un polígono de **n** lados. $\mathbf{Nd = n\,(n-3)/2}$

Clasificación

Existen varias clasificaciones posibles de los polígonos. Para ver una clasificación basada en su número de lados, vea la tabla inferior.

Según las propiedades que cumpla el contorno del polígono, es posible realizar las siguientes clasificaciones.

- **Simple**: si ningún par de aristas no consecutivas se corta. Equivalentemente, su frontera tiene un solo contorno.
- **Complejo** o **cruzado**: si dos de sus aristas no consecutivas se intersecan.
- **Convexo**: si todo segmento que une dos puntos cualesquiera del contorno del polígono yace en el interior de este. Todo polígono simple y con todos sus ángulos internos menores que 180° es convexo.
- **No convexo**: si existe un segmento entre dos puntos de la frontera del polígono que sale del mismo. O si existe una recta capaz de cortar el polígono en más de dos puntos.
- **Cóncavo**: si es un polígono simple y no convexo.
- **Equilátero**: si tiene todos sus lados de la misma longitud.
- **Equiángulo**: si tiene todos sus ángulos interiores iguales.
- **Regular**: si es equilátero y equiángulo a la vez.
- **Irregular**: si no es regular, es decir, si no es equilátero o equiángulo.
- **Cíclico**: si existe una circunferencia que pasa por todos los vértices del polígono. Todos los polígonos regulares son cíclicos.
- **Alabeado**: si sus lados no están en el mismo plano.
- **Estrellado**: si se construye a partir de trazar diagonales en polígonos regulares. Se obtienen diferentes construcciones dependiendo de la unión de los vértices: de dos en dos, de tres en tres, etc.
- **Reticular**: al representarlo en un reticulado, cada vértice yace exactamente en un vértice de cuadrado unitario del reticulado (en este caso funciona la fórmula de Pick).
- Polígono simple, cóncavo e irregular.

Nombres de polígonos según su número de lados

Los polígonos tienen un nombre especial para designar el número de lados. Los nombres más comunes están en la siguiente tabla:

Clasificación de polígonos según el número de lados

Nombre	nº lados
trígono o triángulo	3
tetrágono, cuadrángulo o cuadrilátero	4
pentágono	5
hexágono	6
heptágono	7
octógono u octágono	8
eneágono o nonágono	9
decágono	10
endecágono o undecágono	11
dodecágono	12

tridecágono	13
tetradecágono	14
pentadecágono o pentedecágono	15
hexadecágono	16
heptadecágono	17
octodecágono u octadecágono	18
eneadecágono o nonadecágono	19
isodecágono o icoságono	20
icosakaidígono	22
triacontágono	30
tetracontágono	40
pentacontágono	50
hexacontágono	60
heptacontágono	70
octocontágono u octacontágono	80
eneacontágono o nonacontágono	90
hectágono	100
chiliágono	1000
miriágono	10000
decamiriágono	100000
hectamiriágono o megágono	1000000
apeirógono	∞

Cuadrilátero

Polígono con cuatro lados.

Paralelogramo: cuadrilátero en el que sus lados opuestos son paralelos y de igual longitud.

Trapecio: cuadrilátero que tiene un solo par de lados opuestos paralelos.

Los trapecios se clasifican en rectángulos, isósceles y escalenos.

Trapezoide: cuadrilátero que no tiene lados opuestos paralelos.

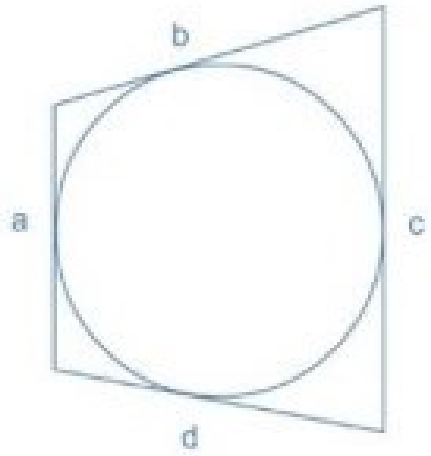
Cuadrado: cuadrilátero con cuatro lados iguales y ángulos rectos.

Rectángulo: sólo los lados opuestos son iguales, aunque todos los lados se cortan en ángulos rectos.

Rombo: cuadrilátero que tiene todos los lados iguales.

Romboide: trapezoide con lados iguales consecutivos. Unión de 2 triángulos isósceles.

El **perímetro** de un **polígono** es igual a la **suma** de las **longitudes** de sus **lados**.



$$a + c = b + d$$

El **teorema de Pitot** establece que en un cuadrilátero convexo que inscribe una circunferencia, el resultado de la suma de los lados opuestos es el mismo. El teorema lleva el nombre del ingeniero francés Henri Pitot.

$$a + c = b + d$$

Demostración

Sea $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, se llama E, F, G, H a los puntos de tangencia en los lados a, b, c, d respectivamente.

Por ser rectas tangentes se sabe que:

$$AE = AH = W, BE = BF = X, CF = CG = Y, DG = DH = Z,$$

Luego:

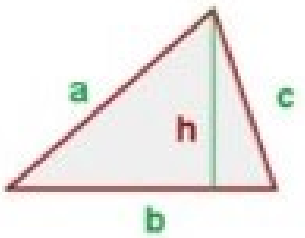
$$AB = W + X, BC = X + Y, CD = Y + Z, DA = W + Z,$$

Entonces $AB + CD = BC + DA = W + X + Y + Z$

Áreas de las figuras geométricas planas

Es la medida de la región o superficie encerrada por el contorno de una figura geométrica plana.

Área de un triángulo



Perímetro de un triángulo

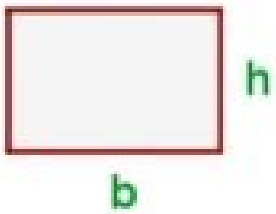
Triángulo Equilátero	Triángulo Isósceles	Triángulo Escaleno
$P = 3 \cdot l$	$P = 2 \cdot l + b$	$P = a + b + c$
h = 0,866.l		$A = [p(p-a)(p-b)(p-c)]^{1/2}$
$A = 0{,}433 \cdot l^2$		p = (a+b+c)/2

Área de un cuadrado

$A = l^2$

Perímetro de un cuadrado: $P = 4 \cdot l$

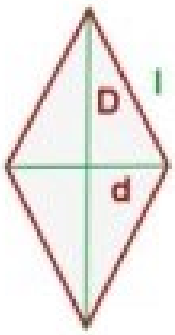
Área de un rectángulo



$A = b \cdot h$

Perímetro de un rectángulo: $P = 2 \cdot (b + b)$

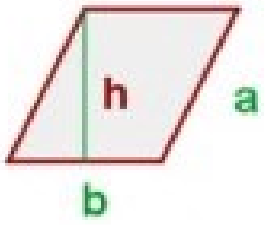
Área de un rombo



$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Perímetro de un rombo $P = 4 \cdot l$

Área del paralelogramo

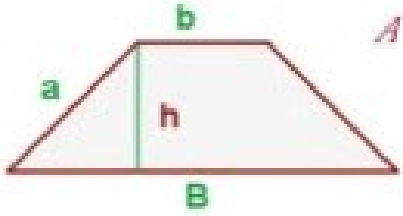


$A = b \cdot h$

Perímetro del paralelogramo

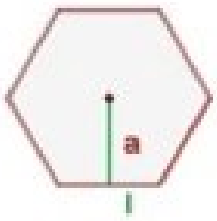
$P = 2 \cdot (a + b)$

Área del trapecio



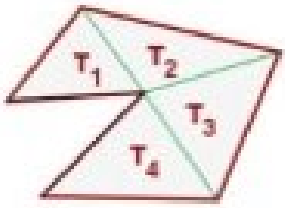
$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Área de un polígono regular



$$A = \frac{PERIMETRO \cdot APOTEMA}{2}$$

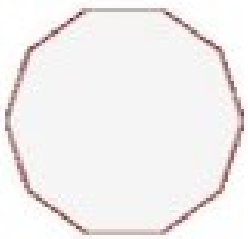
Área de un poligono irregular



El **área** se obtiene **triangulando el polígono y sumando las áreas** parciales.

$$A = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

Perímetro de un polígono regular



$$P = n \cdot l$$

El número Pi (π)

Es la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

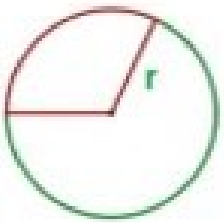
Longitud de una circunferencia

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot d$$

Área de un círculo

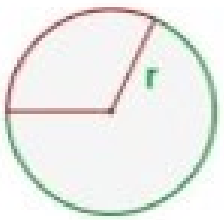
$$A = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

Longitud de un arco de circunferencia



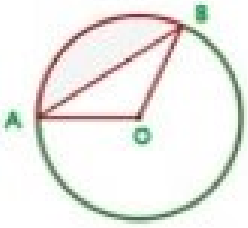
$$L = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot a}{360^\circ}$$

Área del sector circular



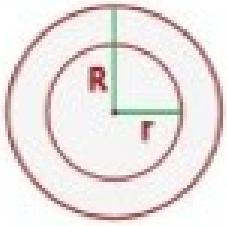
$$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot a}{360^\circ}$$

Área de un segmento circular



Área del segmento circular AB = Área del sector circular AOB – Área del triángulo AOB

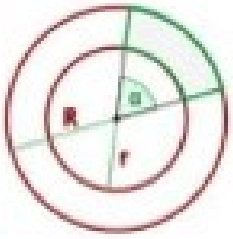
Área de una corona circular



$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

El **área** de una **corona circular** es igual al **área** del **círculo mayor** menos el área del **círculo menor**.

Área de un trapecio circular



$$A = \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot a}{360^\circ}$$

El **área** del **trapecio circular** es igual al **área** del **sector circular mayor menos** el **área** del **sector circular menor.**

Circunferencia y círculo

Este párrafo está orientado a la medición de ángulos y para ello es necesario conocer con amplitud las herramientas de medición. La fundamental es la circunferencia ya que proporciona un sistema de medición a través de su arco. Así pues, después de detallar las características de esta línea cerrada y de las propiedades de elementos que se pueden considerar en ella, estableceremos cómo se miden los ángulos centrales y las relaciones angulares que se producen según sea la posición de estos respecto de la circunferencia.

Una circunferencia es una línea cerrada y plana cuyos puntos equidistan de uno fijo que se llama centro. La distancia de cualquiera de sus puntos al centro se llama radio.

Definiciones

- La región interior a la circunferencia se denomina círculo.
- La parte de circunferencia comprendida entre dos puntos de ella se denomina arco.
- El segmento que determinan dos puntos cualesquiera de la circunferencia se denomina cuerda.
- La cuerda que contiene al centro de la circunferencia se denomina diámetro.
- La porción de círculo comprendida entre una cuerda y el arco que determina se denomina segmento circular.
- La porción de círculo comprendida entre dos radios y los arcos comprendidos se denomina sector circular.
- Las posiciones de una recta sobre una circunferencia son: **exterior** (no tienen ningún punto interior), **secante** (tienen dos puntos en común) y **tangente** (tienen un único punto en común).
- Propiedades:
- Cada diámetro divide a la circunferencia en dos partes iguales llamadas semicircunferencias (Ídem con el círculo).
- La mediatriz de cualquier cuerda contiene al centro de la circunferencia.
- La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio determinado por el centro y el punto de tangencia.
- Tres puntos determinan una única circunferencia.

Posiciones de dos circunferencias

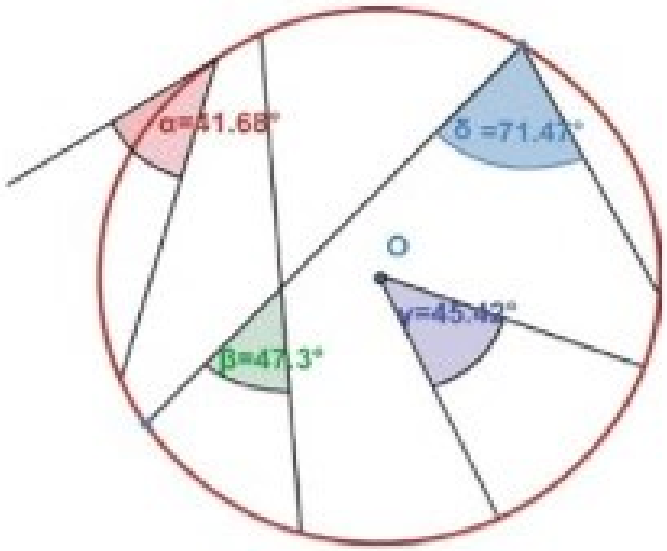
- Exteriores: Cada circunferencia está formada por puntos exteriores de la otra.

- Interiores: Una circunferencia es interior a otra cuando aquella está formada por puntos del círculo de esta. El radio de la interior debe ser menor que el de la exterior.
- Concéntricas: cuando ambas tienen el mismo centro. A la región del plano que delimitan se le denomina corona circular.
- Secantes: Tienen dos puntos en común.
- Tangentes interiores: Sólo tienen un punto en común y el resto de los puntos de una de ellas son puntos del círculo de la otra. El radio de la tangente interior debe ser menor que el de la tangente exterior. Los centros de ambas son interiores a una de ellas y ambos están alineados con el punto de tangencia.
- Tangentes exteriores: Sólo tienen un punto en común y el resto de los puntos de una de ellas son puntos del exterior de la otra. El centro de una es exterior a la otra y ambos están alineados con el punto de tangencia.

Medición de ángulos

Se divide a la circunferencia de centro O en 360 partes, que se denominan grados, y un ángulo que mida un grado tiene como arco una de estas divisiones. En el sistema sexagesimal, heredado de los babilónicos, cada grado se divide en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos.

Ángulos en la circunferencia



Dibujando líneas que estén dentro de una circunferencia o que tengan relación con ella podemos definir distintos tipos de ángulos, como se aprecia en la figura, donde:

α (alfa) = **ángulo semiinscrito** (41,68º) , cuyo vértice está en la circunferencia y tiene un lado que es tangente en dicho vértice y el otro que es una cuerda.

β (beta) = **ángulo interior** (47,3º), con sus lados que son cuerdas de la circunferencia y con el vértice situado en su interior.

γ (gama) = **ángulo central** o del centro (45,42º), con el vértice en el centro de la circunferencia y con sus lados coincidentes con radios.

δ (delta) = **ángulo inscrito** (71,47º), con el vértice sobre la circunferencia y con lados que son cuerdas de ella.

A continuación, veremos algunas características de estos ángulos y analizaremos ciertas relaciones entre ellos.

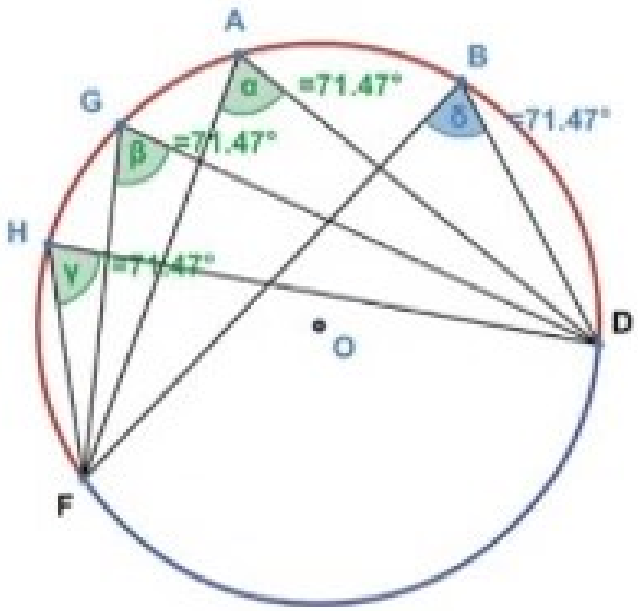
Ángulo inscrito en la circunferencia

El ángulo inscrito en una circunferencia es aquel que tiene su vértice sobre la circunferencia y cuyos lados son dos cuerdas de ella (si las cuerdas se prolongan, diremos que son dos **rectas secantes**).

En la figura a la izquierda, vemos varios ángulos inscritos que abarcan o subtienden el **arco FD**.

Todos miden lo mismo (71, 47°), por ello, podemos afirmar que **"los ángulos inscritos que abarcan el mismo arco son iguales"**.

En nuestro ejemplo son iguales los ángulos de vértices **B, A, G, H**.

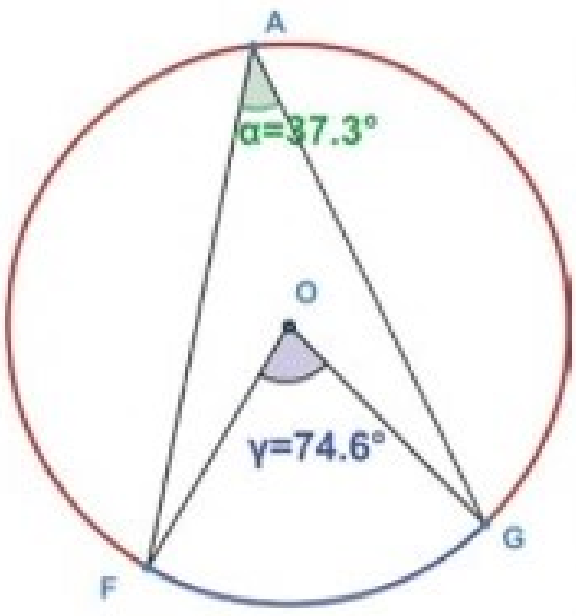


También debemos recordar que **un ángulo inscrito vale la mitad del arco que abarca.**

El ángulo se expresa en grados. El valor de un arco se expresa en grados y coincide con el valor del ángulo del centro correspondiente.

Cuando el arco comprendido entre los radios tiene la longitud de estos, el valor del ángulo central es un **radián**, una circunferencia tiene pues **2π** radianes.

Ángulo central en la circunferencia

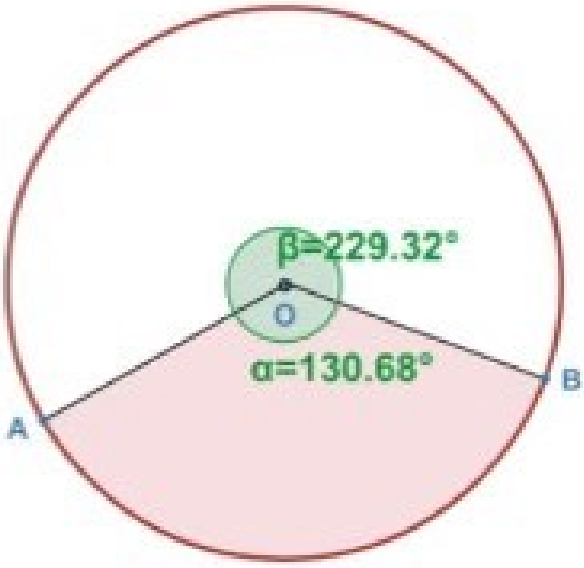


El **ángulo central o del centro** es el que tiene el vértice en el centro de la circunferencia, siendo sus lados dos radios.

En la figura a la derecha vemos que el ángulo del centro dibujado, con vértice en O, abarca o subtiende el **arco FG.**

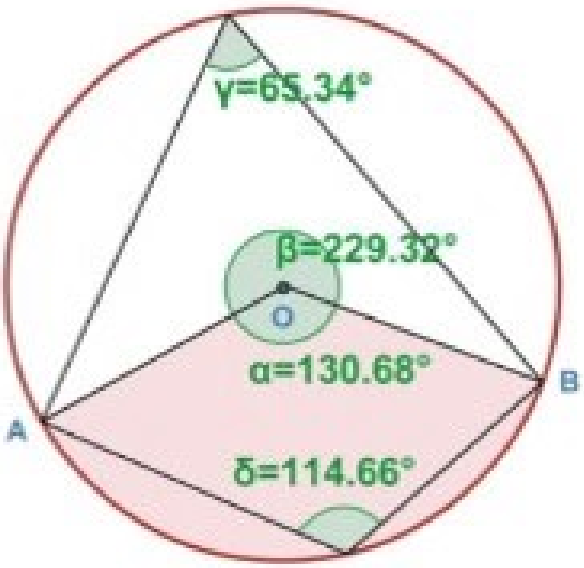
Al respecto, debemos reiterar que **"el ángulo del centro mide lo mismo que el arco que abarca"**.

En la misma figura de la derecha se dibujó un **ángulo inscrito (α = 37,3°)** que subtiende o abarca el mismo arco que el **ángulo del centro (γ = 74,6°)**; en dicha situación (y los valores indicados lo confirman), "cuando **un ángulo inscrito y un ángulo del centro de una circunferencia abarcan el mismo arco, el ángulo inscrito vale la mitad que el del centro"**.



Es importante notar que dos puntos, **A** y **B**, sobre una circunferencia determinan dos arcos y, por tanto, dos ángulos centrales:

Uno **cóncavo (α = 130,68°)** y uno **convexo (β = 229,32°)**, que sumarán **360°**.



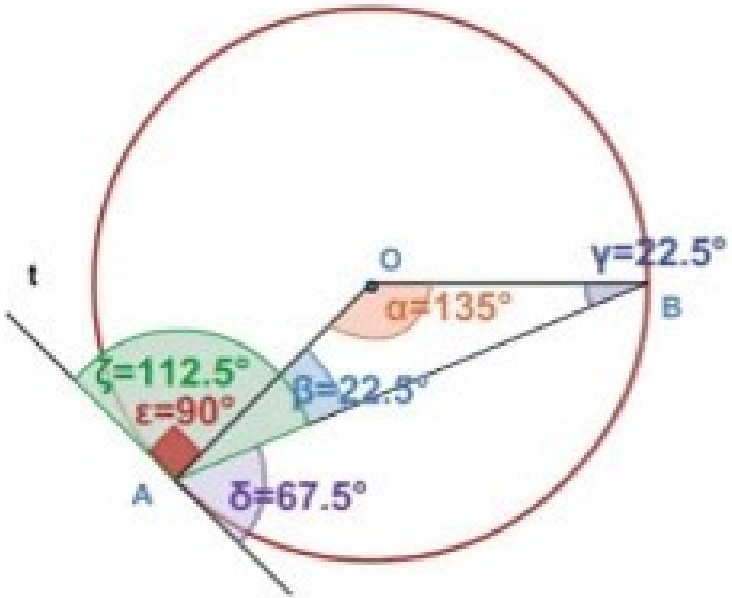
Los **ángulos inscritos (γ = 65,34° y δ = 114,66 en la figura de la derecha)** que subtienden los mismos arcos que subtienden los ángulos del centro mencionados, serán suplementarios, pues sumarán siempre **180°**.

Ángulo semiinscrito en la circunferencia

El ángulo **semiinscrito** tiene el vértice **A** en la circunferencia, siendo sus lados la recta **t** tangente en **A** y la **cuerda AB** (figura a la izquierda).

La tangente, que es perpendicular al radio, es lado de dos ángulos semiinscritos y cada uno subtiende un arco diferente.

Un ángulo **semiinscrito** (en la figura es **δ = 67,5°**) vale la mitad que el ángulo del centro (**α = 135°**) que abarca el arco **AB**.



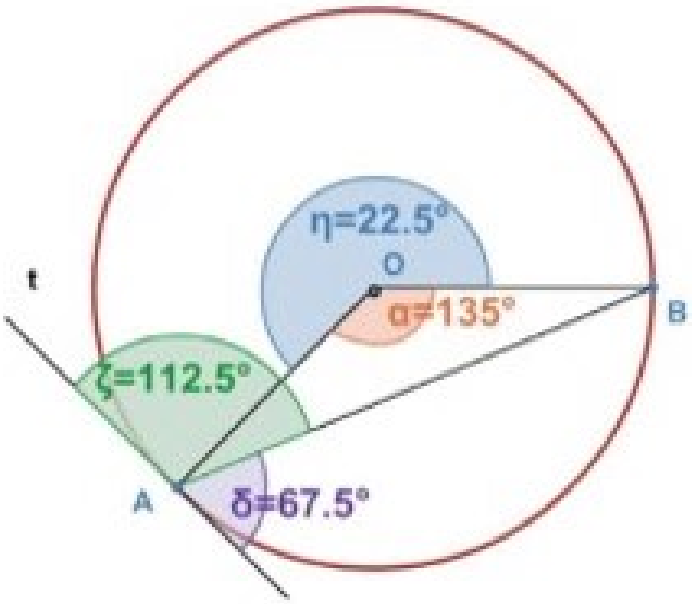
Nótese que en la figura están dados los valores de los ángulos y es fácil comprobar lo antes dicho, pero para comprobarlo de modo general, sin saber los valores, calculamos el valor del ángulo central así:

$$\alpha = 180^\circ - 2\beta$$

por pertenecer al **triángulo isósceles ABC** (hay que recordar que los ángulos interiores de cualquier triángulo suman 180º, y que el triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales).

Entonces, calculamos el valor del ángulo **δ** semiinscrito:

$$180^\circ - 90^\circ - \beta = \frac{\alpha}{2}$$



El razonamiento es el mismo cuando el **ángulo semiiscrito ζ (zeta) = 112,5°)** abarca el otro arco definido por **AB.**

Ángulo interior en la circunferencia

El ángulo **interior α** tiene el vértice en un punto interior de la circunferencia, en el **círculo.** Sus lados son dos rectas secantes.

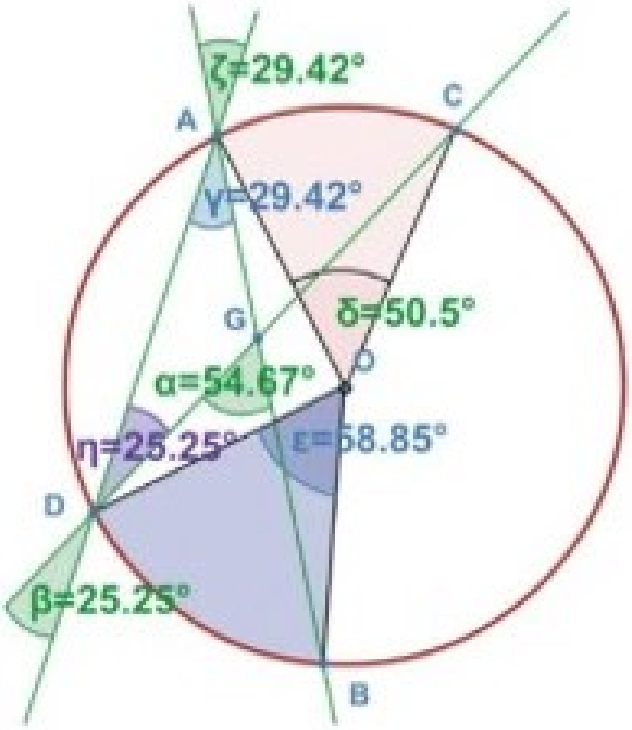
El ángulo interior $\alpha = \frac{(\delta + \varepsilon)}{2}$, siendo **δ** y **ε** los ángulos centrales de los arcos (AC y DB) definidos por las rectas secantes.

Vamos a comprobarlo:

Consideramos el **triángulo escaleno AGD:**

El ángulo $\eta = \frac{\delta}{2}$, pues es el ángulo inscrito que abarca el arco **AC;**

El ángulo $\gamma = \frac{\varepsilon}{2}$, pues es el ángulo inscrito que abarca el arco **DB;** entonces el ángulo $AGD = 180^\circ - (\frac{\delta}{2} + \frac{\varepsilon}{2})$, por lo tanto,



$$\alpha = 180^\circ - \sphericalangle AGD$$

$$\alpha = 180^\circ - 180^\circ - \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

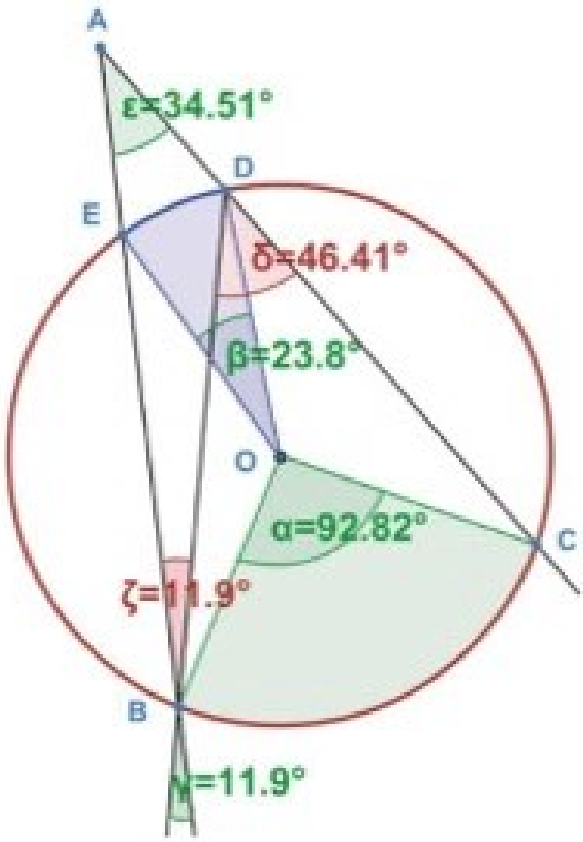
$$\alpha = -\frac{\delta}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\alpha = \frac{(\delta + \varepsilon)}{2}$$

Ángulos exteriores a la circunferencia

El **ángulo exterior ε** tiene el vértice (A) en un punto exterior a la circunferencia. Sus lados son dos **rectas secantes (AB y AC).**

El ángulo exterior $\varepsilon = \frac{(\alpha - \beta)}{2}$, siendo **α y β** los ángulos centrales de los dos arcos definidos por las dos rectas secantes.



Vamos a comprobarlo:

Consideramos el **triángulo escaleno ADB:**

El ángulo $\zeta = \frac{\beta}{2}$, pues es el ángulo inscrito que abarca el **arco ED;**

El ángulo $\gamma = \frac{\varepsilon}{2}$, pues es el ángulo inscrito que abarca el **arco BC;**

El ángulo $ADB = 180^\circ - \frac{\alpha}{2}$, suplementario de **CDB;**

Por lo tanto, el ángulo

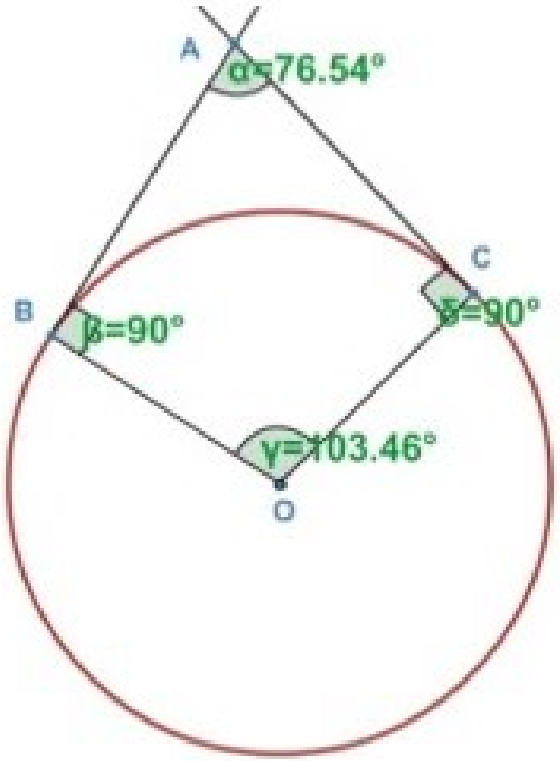
$$\varepsilon = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \left(180^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\varepsilon = -\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{(\alpha - \beta)}{2}$$

Hay otros dos casos de ángulos exteriores, según sus lados sean secantes o tangentes a la circunferencia:

El **ángulo exterior circunscrito α** (figura de la izquierda) tiene los dos lados tangentes a la circunferencia; **α = 180° — g,** siendo **g** el ángulo central **BOC** definido por las tangentes.



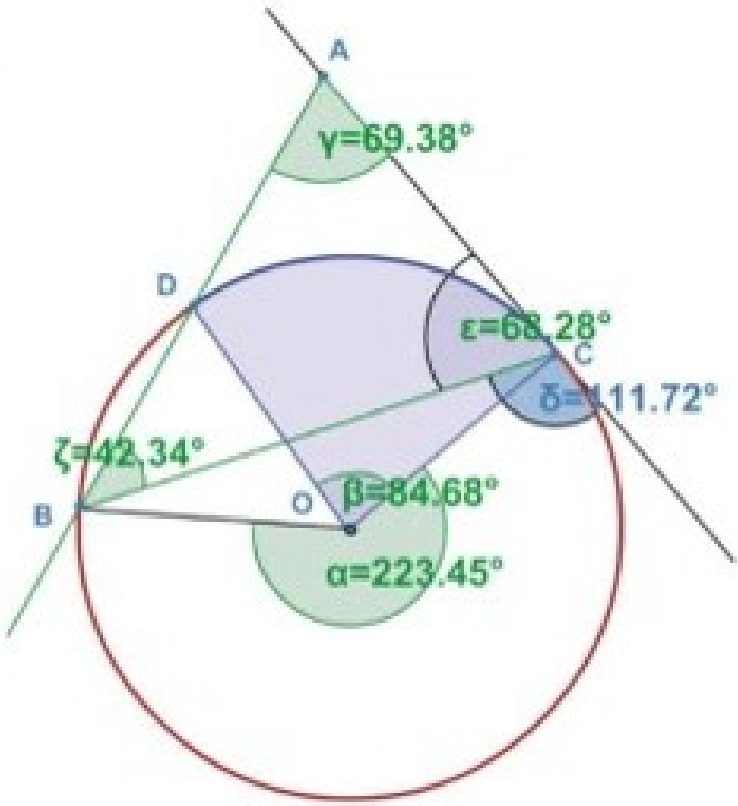
Vamos a comprobarlo:

El **cuadrilátero ABOC** cumple, como tal, que la suma de sus ángulos interiores es 360º.

Siendo dos de sus ángulos rectos **(β y δ)**, resulta que **180º = α+ γ**, luego **α =180º -γ**.

El **ángulo exterior circunscrito γ** tiene un lado secante y otro tangente a la circunferencia (figura a la derecha).

El **ángulo exterior** $\gamma = \frac{(\alpha - \beta)}{2}$, siendo **α y β** los ángulos centrales de los arcos definidos por sus lados.



Desafío: comprobarlo

Considerar el **triángulo escaleno ABC:**

El ángulo $ABC(\zeta) = \frac{\beta}{2}$, pues es el **ángulo inscrito** que abarca el arco **CD;**

El ángulo $BCA(\varepsilon) = 180^\circ - \frac{\alpha}{2}$, pues es el ángulo suplementario de **δ**, ángulo semiinscrito que abarca el arco BC.

Teorema del ángulo inscrito

La amplitud de un ángulo inscrito es la mitad del ángulo central correspondiente.
Demostración: realizar como desafío.

Consecuencia

Todos los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco tienen la misma medida.

El teorema anterior permite establecer relaciones de los ángulos anteriores con los centrales correspondientes.

1. La amplitud del ángulo semiinscrito, **α**, es la mitad del ángulo central correspondiente.
2. La amplitud del ángulo interior, **α**, es la semisuma de los arcos que subtienden **α** y el ángulo opuesto por el vértice **β**, que se obtiene al prolongar los lados de **α**.
3. La amplitud del ángulo exterior, **α**, es la semidiferencia de arcos, **β** y **δ**, que subtiende.

El teorema del ángulo inscrito permite establecer uno de los teoremas básicos de la geometría.

Teorema:

La suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es de 180°.

Demostración:

Es trivial, ya que, considerando la circunferencia que pasa por sus vértices, los ángulos del triángulo **α, β, δ** son inscritos a esta circunferencia y los arcos de sus centrales correspondientes **α, β, δ**$_1$ son toda la circunferencia. Por tanto:

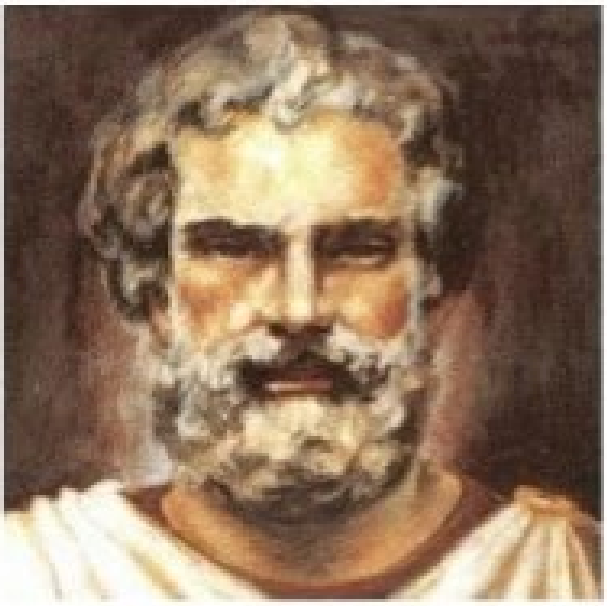
$$\alpha + \beta + \delta = \alpha/2 + \beta_1/2 + \delta_1/2 = (\alpha + \beta_1 + \delta_1)/2 = 180^\circ$$

Desafíos

1. Calcula el menor de los dos ángulos que forman las agujas del reloj en cada caso siguiente: a) 12h 30' b) 2h 15' c) 7h 23' d) 4h 52' e) 9h 45' f) 5h10'
2. Un ángulo de 64° tiene sus lados tangentes a una circunferencia de radio de 1 metro. ¿Cuánto mide el menor de los arcos en que los puntos de tangencia dividen a la circunferencia?
3. Se divide una circunferencia en 15 partes iguales y se numeran los puntos de división consecutivamente.
   Halla el ángulo que forma la recta 1-7 (recta que pasa por los puntos 1 y 7) con la 1-9. Resuelve la misma pregunta con las rectas 1-4 y 7-9.
4. Se divide una circunferencia en 12 partes iguales y se numeran consecutivamente los puntos de división. Dibujando cuatro rectas: secantes 2-10 y 5-10 y tangentes en 2 y 4, se obtienen los vértices del cuadrilátero 10-2-P-Q. Halla las medidas de los cuatro ángulos interiores del cuadrilátero.

Thales de Mileto

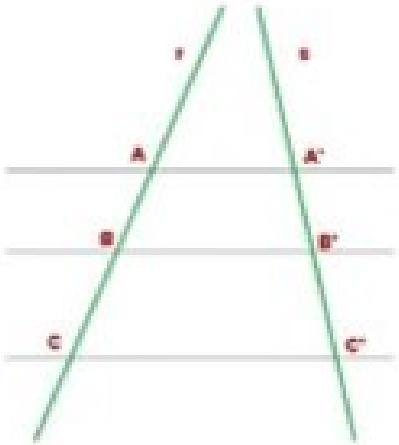
"La cosa más difícil es conocernos a nosotros mismos; la más fácil es hablar mal de los demás". Fue el primer matemático que realizó una demostración, según los historiadores, quien en sus múltiples viajes se encontró con fórmulas matemáticas



discrepantes entre los distintos pueblos. Por ejemplo, las de la matemática babilónica, definida por los historiadores como una mezcla de semirreligiosidad y juego. Se dice que Thales inventó la demostración, pues no solo tenía la necesidad de discernir cuál de las fórmulas era la correcta, sino que además debía convencer a los demás de que lo era. Se destacó principalmente por sus trabajos en filosofía y matemáticas. Pensaba que el agua llenaba todo el espacio y se le atribuyen varios teoremas de la geometría elemental.

Teorema de Thales

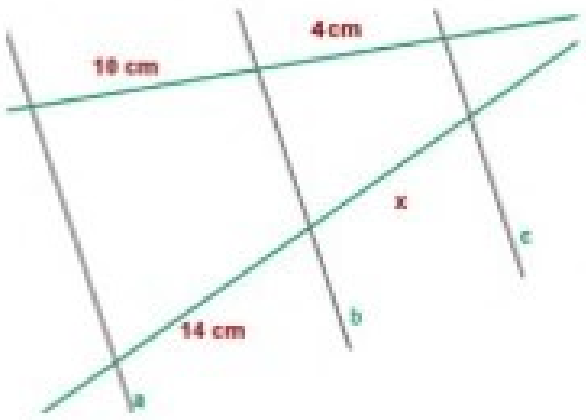
Si dos rectas cualesquiera se cortan por varias rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

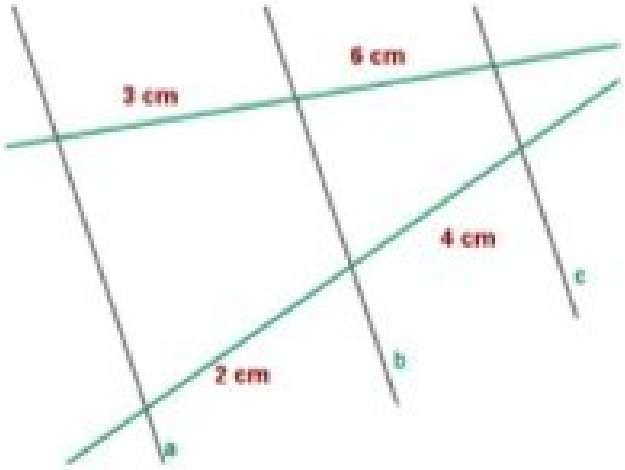
Ejemplos:

1.- Las rectas a, b y c son paralelas. Halla la longitud de x.



$$\frac{14}{10} = \frac{x}{4} \qquad x = \frac{14 \cdot 4}{10} = 5.6\ cm$$

2.- Las rectas a, b son paralelas. ¿Podemos afirmar que c es paralela a las rectas a y b?

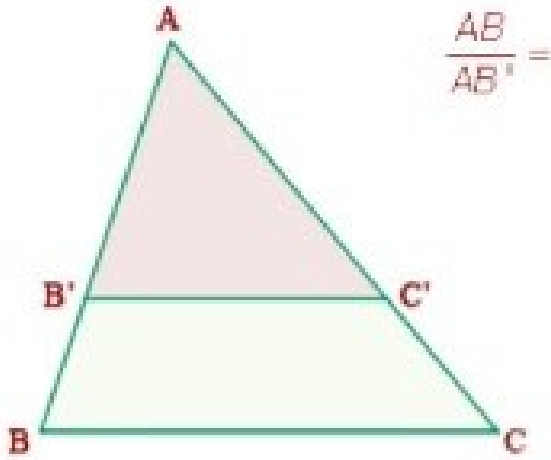


Sí, porque se cumple el teorema de Thales.

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} \qquad 12 = 12$$

Teorema de Thales en un triángulo

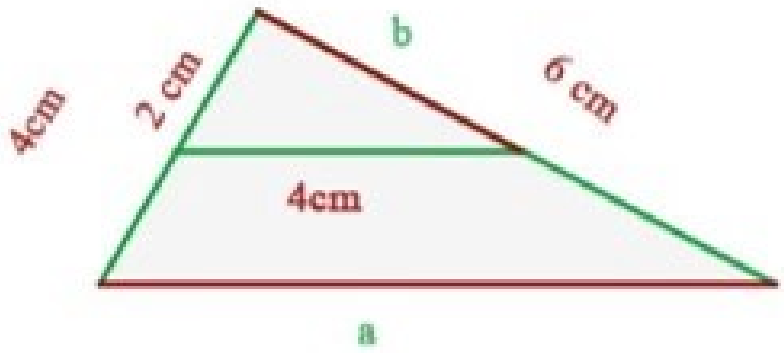
Dado un triángulo ABC, si se traza un segmento paralelo, B'C', a uno de los lados del triángulo, se obtiene otro triángulo AB'C', cuyos lados son proporcionales a los del triángulo ABC.



$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Ejemplo:

Hallar las medidas de los segmentos a y b.



$$\frac{4}{2} = \frac{a}{4} \qquad a = 8\,cm$$

$$\frac{4}{2} = \frac{6}{b} \qquad b = 3\,cm$$

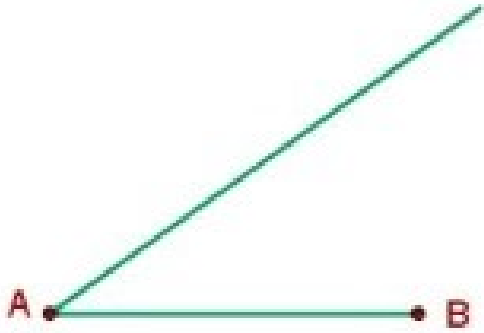
Aplicaciones del teorema de Thales

El teorema de Thales se utiliza para dividir un segmento en varias partes iguales.

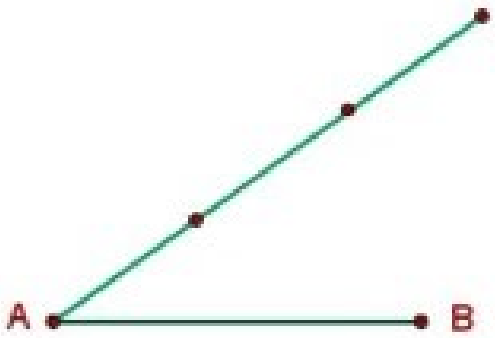
Ejemplo:

Dividir el segmento AB en 3 partes iguales.

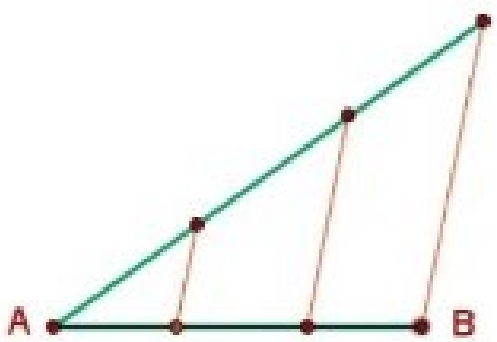
1.- Se dibuja una semirrecta de origen A.



2.- Tomando como unidad cualquier medida, se señalan en la semirrecta 3 unidades de medida a partir de A.



3.- Por cada una de las divisiones de la semirrecta se trazan rectas paralelas al segmento que une B con la última división sobre la semirrecta. Los puntos obtenidos en el segmento AB determinan las 3 partes iguales en que se divide.



Leyenda

Según la leyenda (relatada por Plutarco), Thales de Mileto en un viaje a Egipto visitó las pirámides de Guiza (las de Keops, Kefrén y Micerino), construidas varios siglos antes. Admirado ante tan portentosos monumentos de esta civilización, quiso saber su altura. De acuerdo a la leyenda, trató este problema con semejanza de triángulos (y bajo la suposición de que los rayos solares incidentes eran paralelos), pudo establecer una relación de semejanza (teorema primero *de* Thales) entre dos triángulos rectángulos, por un lado el que tiene por catetos (*C* y *D*) a la longitud de la sombra de la pirámide (conocible) y la longitud de su altura (desconocida), y por otro lado, valiéndose de una vara (clavada en el suelo de modo perfectamente vertical) cuyos catetos conocibles (*A* y *B*) son, la longitud de la vara y la longitud de su sombra. Realizando las mediciones en una hora del día en que la sombra de la vara sea perpendicular a la base de la cara desde la cual medía la sombra de la pirámide y agregando a su sombra la mitad de la longitud de una de las caras, obtenía la longitud total *C* de la sombra de la pirámide hasta el centro de esta.

Un paréntesis de humor por Les Luthiers

Teorema de Thales
"Si tres o más paralelas
son cortadas por dos transversales,
dos segmentos de una de estas son proporcionales
a los dos segmentos correspondientes de la otra"

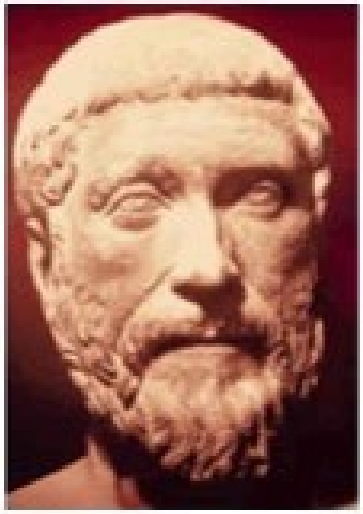
Johann Sebastian Mastropiero dedicó su "Divertimento matemárico opus 48", el teorema de Thales, a la condesa Shortshot, con quien viviera un apasionado romance varias veces. En una carta en la que le dice: "Condesa, nuestro amor se rige por el teorema de Thales: cuando estamos paralelos y horizontales, las transversales de la pasión nos atraviesan y nuestros segmentos correspondientes resultan maravillosamente proporcionales".

Hipótesis:
A paralela a B,
B paralela a C,
O-P es a P-Q_1
M-N es a N-T,
La bisectriz yo trazaré
y a cuatro planos intersecaré.
Una igualdad yo encontraré:
OP+PQ_1 es igual a ST.
Usaré la hipotenusa.
Ay, no te compliques, nadie la usa.
Trazaré, pues, un cateto.
Yo no me meto, yo no me meto.

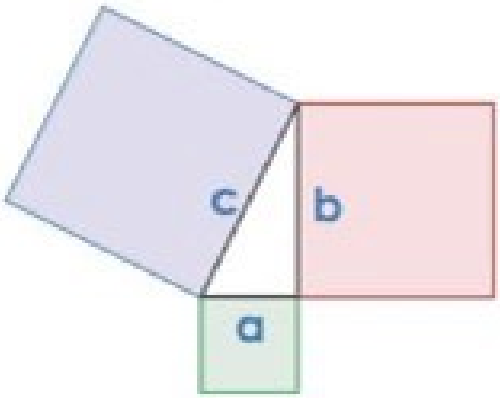
Triángulo, tetrágono, pentágono, hexágono, heptágono, octógono, son todos polígonos.
Seno, coseno, tangente y secante, y la cosecante y la cotangente.

Pitágoras de Samos

"De insensatos es hablar y obrar sin reflexionar. Consulta, delibera y elige la más noble conducta. Trata de edificar sobre el presente lo que ha de ser realidad futura. No alardees de lo que no entiendas, pero aprende siempre y en toda circunstancia, y la satisfacción será su resultado."



Teorema de Pitágoras



"En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

Si un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes ***a*** y ***b***, y la medida de la hipotenusa es ***c***, se establece que:

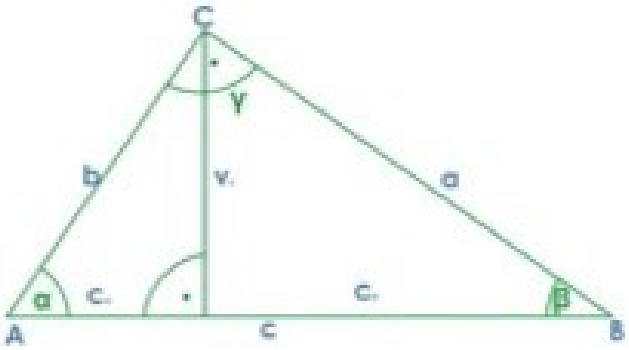
$$c^2 = a^2 + b^2$$

De la ecuación se deducen fácilmente 3 corolarios de aplicación práctica:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2} \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Historia

El teorema de Pitágoras tiene este nombre porque su descubrimiento recae sobre la escuela pitagórica. Anteriormente, en Mesopotamia y el Antiguo Egipto se conocían ternas de valores que se correspondían con los lados de un triángulo rectángulo, y se utilizaban para resolver problemas referentes a los citados triángulos, tal como se indica en algunas tablillas y papiros. Sin embargo, no ha perdurado ningún documento que exponga teóricamente su relación. La pirámide de Kefrén, datada en el siglo XXVI a. C., fue la primera gran pirámide que se construyó basándose en el llamado triángulo sagrado egipcio, de proporciones 3-4-5.



Demostración

Sea el triángulo rectángulo de catetos ***a*** y ***b*** e hipotenusa ***c***, se trata de demostrar que el área del cuadrado de lado *c* es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lado *a* y lado *b*. Es decir:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Si añadimos tres triángulos iguales al original dentro del cuadrado de lado ***c*** formando la figura mostrada en la imagen, obtenemos un cuadrado de menor tamaño. Se puede observar que el cuadrado resultante tiene efectivamente un lado de ***b*** - ***a***. Luego, el área de este cuadrado menor puede expresarse de la siguiente manera:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ya que $(b - a)^2 = (a - b)^2$

Es evidente que el área del cuadrado de lado ***c*** es la suma del área de los cuatro triángulos de altura ***a*** y base ***b*** que están dentro de él, más el área del cuadrado menor:

$$c^2 = 4 \cdot \left(\frac{a \cdot b}{2}\right) + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2$$

Con lo cual queda demostrado el teorema.

Polígono Dual

En **geometría**, un polígono dual o conjugado es el polígono cuyos **vértices** se corresponden con el punto medio de los **lados** del otro polígono dado.

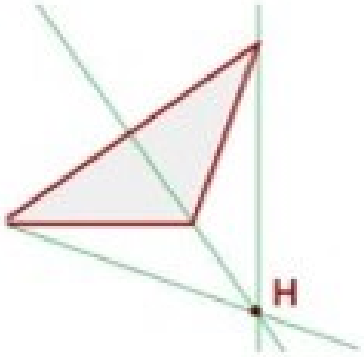
El dual de un cuadrilátero es siempre un paralelogramo.

El dual de un triángulo es otro triángulo de superficie ¼ de la superficie original.

Elementos o puntos notables de un triángulo

Ortocentro

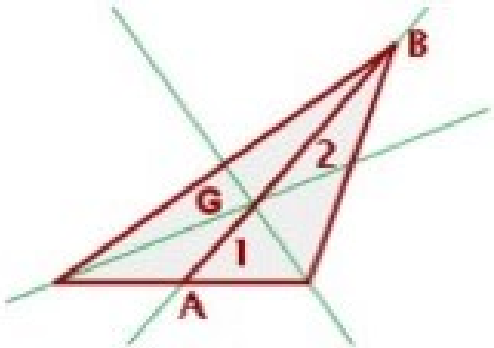
Es el punto de corte de las tres **alturas**.



Medianas de un triángulo

Mediana es cada una de las rectas que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto.

Baricentro



Es el punto de corte de las tres medianas.

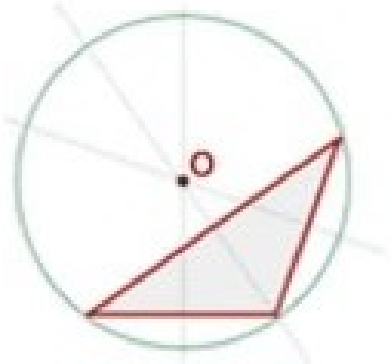
El baricentro divide a cada mediana en dos segmentos, el segmento que une el baricentro con el vértice mide el doble que el segmento que une baricentro con el punto medio del lado opuesto.

$$BG = 2GA$$

Mediatrices de un triángulo

Mediatriz es cada una de las rectas perpendiculares trazadas a un lado por su punto medio.

Circuncentro

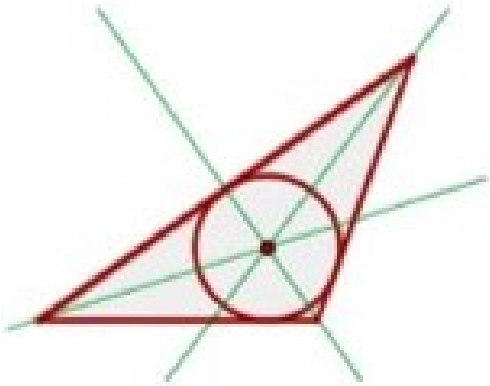


Es el punto de corte de las tres mediatrices. Es el centro de una circunferencia circunscrita al triángulo.

Bisectrices de un triángulo

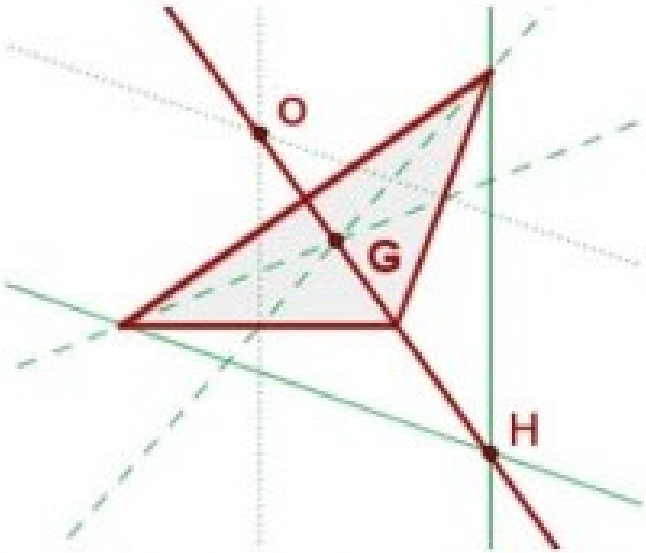
Bisectriz es cada una de las rectas que divide a un ángulo en dos ángulos iguales.

Incentro



Es el punto de corte de las tres bisectrices. Es el centro de una circunferencia inscrita en el triángulo.

Recta de Euler



El ortocentro, el baricentro y el circuncentro de un triángulo **no** equilátero están alineados; es decir, pertenecen a la misma recta, llamada recta de Euler.

Leonhard Euler

Matemático suizo (Basilea, Suiza, 1707 - San Petersburgo, 1783). Las facultades que desde temprana edad demostró para las matemáticas le ganaron la estima del patriarca de los Bernoulli, Johann (su profesor) en la Universidad de Basilea. Tras graduarse en dicha institución en 1723, se asoció a la Academia de Ciencias de San Petersburgo, donde coincidió con otro miembro de la familia Bernoulli, Daniel, a quien en 1733 relevó en la cátedra de matemáticas.

Hasta 1741, refinó los métodos y las formas del cálculo integral, que convirtió en una herramienta de fácil aplicación a problemas de física. Además, desarrolló la teoría de las funciones trigonométricas y logarítmicas (introduciendo de paso la notación *e* para definir la base de los logaritmos naturales).

En el ámbito de la geometría desarrolló conceptos básicos como los del ortocentro, el circuncentro y el baricentro de un triángulo, y revolucionó el tratamiento de las funciones trigonométricas al adoptar ratios numéricas y relacionarlas con los números complejos mediante la denominada identidad de Euler.

Se destacan sus trabajos en la mecánica de fluidos, la formulación de las ecuaciones que rigen su movimiento y el estudio sobre la presión de una corriente líquida.

Su obra científica, compuesta por más de ochocientos tratados, lo convierte en el matemático más prolífico de la historia.

De las siguientes solo hay 3 falsas: descubre cuáles son.

1. El circuncentro de un triángulo rectángulo es el punto medio de la hipotenusa.
2. El centro de la circunferencia de nueve puntos está sobre la recta de Euler y es el punto medio del segmento que une el ortocentro y el circuncentro del triángulo.
3. Las tres bisectrices de los ángulos internos de un triángulo se cortan en un único punto.
4. El punto de intersección de las bisectrices de los ángulos del triángulo es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.
5. El circuncentro de un triángulo acutángulo está en el interior del triángulo.
6. El circuncentro de un triángulo obtusángulo está en el exterior del triángulo.
7. El punto de intersección de las mediatrices de los lados del triángulo es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.
8. El incentro de un triángulo cualquiera está siempre en el interior del triángulo.
9. El incentro de un triángulo es equidistante de los vértices del triángulo.
10. En todo triángulo, la circunferencia inscrita es tangente a la de Euler.
11. La circunferencia que pasa por los pies de las alturas de un triángulo es la misma circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados de ese triángulo.
12. La circunferencia que pasa por los pies de las alturas de un triángulo es la misma circunferencia que pasa por los puntos medios de los segmentos de Euler (vértices-ortocentro del triángulo).
13. El centro de la circunferencia de Euler es el punto medio del segmento comprendido entre el ortocentro y el circuncentro.
14. La circunferencia de Euler tiene un radio igual a la mitad de la circunferencia circunscrita al triángulo.
15. El radio de la circunferencia de Euler tiene un radio igual al tercio del radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.
16. El incentro de un triángulo es equidistante de los lados del triángulo.
17. El punto de intersección de las bisectrices de los ángulos del triángulo es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

Teorema "de los 9 puntos"

Circunferencia de Euler

"Dado un triángulo cualquiera ABC, situemos sobre él las siguientes ternas de puntos:

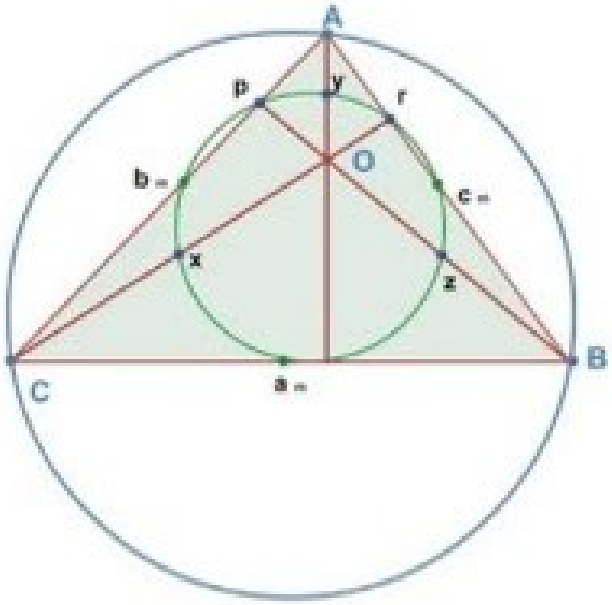
Los puntos medios de los tres lados a, b y c, que llamamos a_m, b_m, c_m (en la figura son los puntos negros).

Los pies de las tres alturas que llamamos p, q y r (en la figura los puntos rojos).

Los puntos medios de los segmentos que unen cada vértice con el ortocentro, que llamamos x, y, z (en la figura los puntos amarillos).

Entonces estos 9 puntos están sobre una circunferencia (en la figura en negro) que resulta tener un radio igual a la mitad de la circunferencia circunscrita al triángulo (en la figura en amarillo).

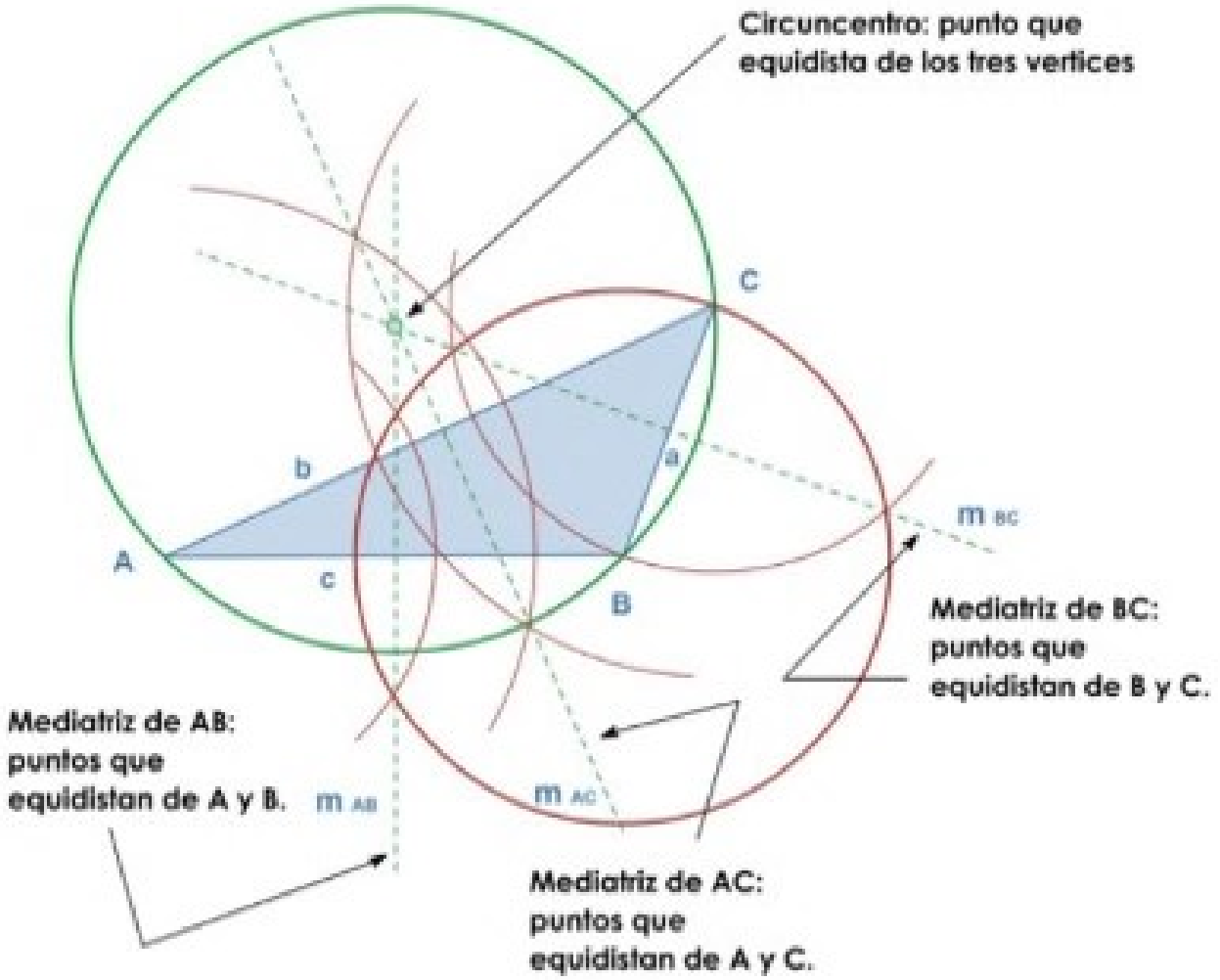
El centro de la circunferencia de nueve puntos está sobre la recta de Euler y es el punto medio del segmento que une el ortocentro y el circuncentro del triángulo.



Los teoremas que aparecen a continuación son clásicos, conocidos desde hace miles de años, pero no por ello resultan menos elegantes. Veamos primero algunas definiciones fundamentales sobre el triángulo.

El Circuncentro

El circuncentro (O) es el centro de la circunferencia circunscrita a un triángulo. Es decir, es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices. Dicho punto es el cruce de las tres mediatrices a los tres lados del triángulo. Demostrar esto no es difícil.

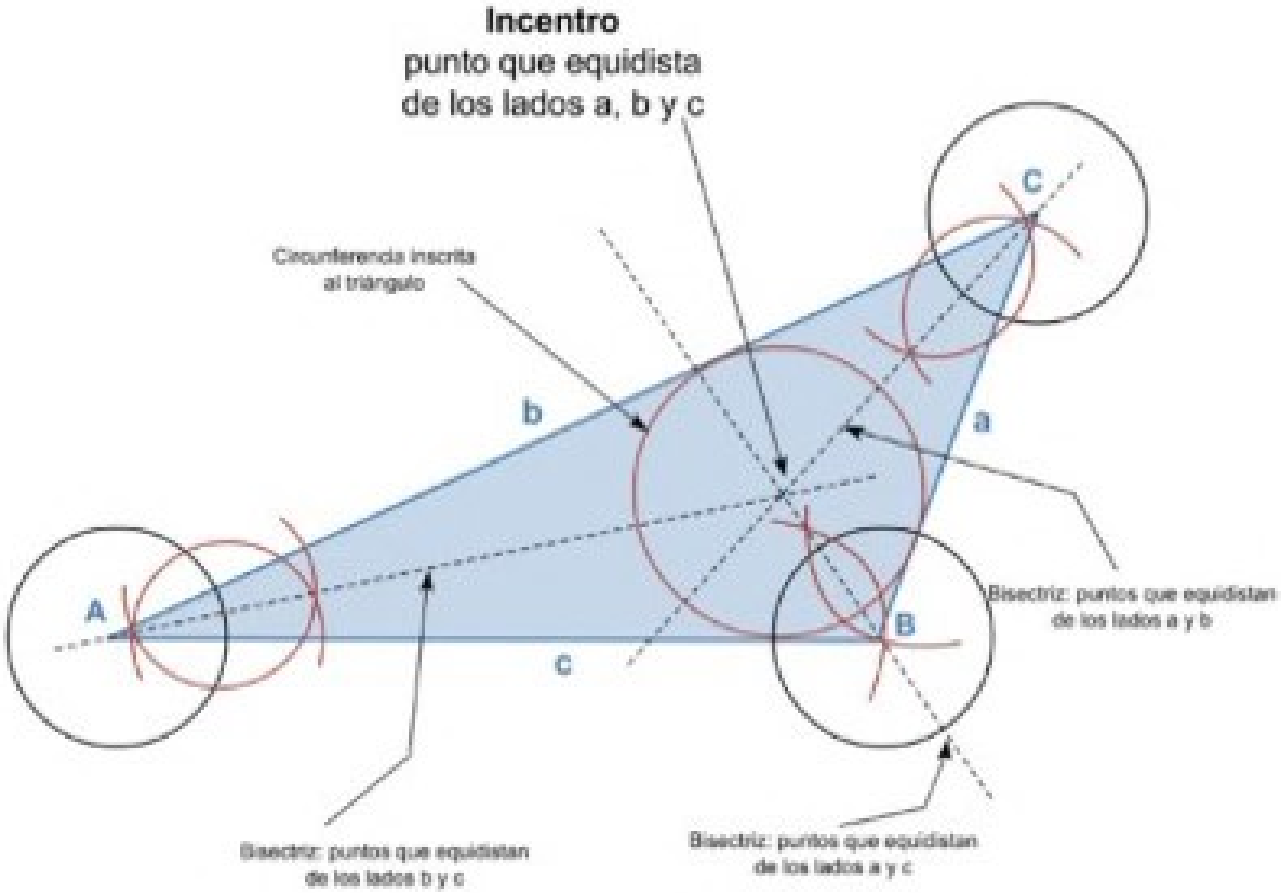


La mediatriz de un segmento es la perpendicular en su punto medio. O también, el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento.

- La mediatriz del lado AB, m_{AB}, estará formada por los puntos que equidistan de A y de B.
- La mediatriz de AC, m_{AC}, estará formada, por los puntos que equidistan de A y C.
- Por tanto, el punto de corte de ambas mediatrices equidistará de A, B y C.

El Incentro

El incentro (I) es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo. Es decir, es el centro de la circunferencia tangente a los tres lados. Las tres bisectrices interiores se cortan en el incentro. Tampoco es difícil demostrar esto:



El incentro es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo. Veamos que el cruce de las tres bisectrices coincide con el incentro.

Sabemos que la bisectriz de un ángulo está formada por el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de sus lados.

Por tanto:

- La bisectriz del ángulo CAB está formada por puntos que equidistan de los lados AC y AB.
- La bisectriz del ángulo ACB está formada por puntos que equidistan de los lados CA y CB.

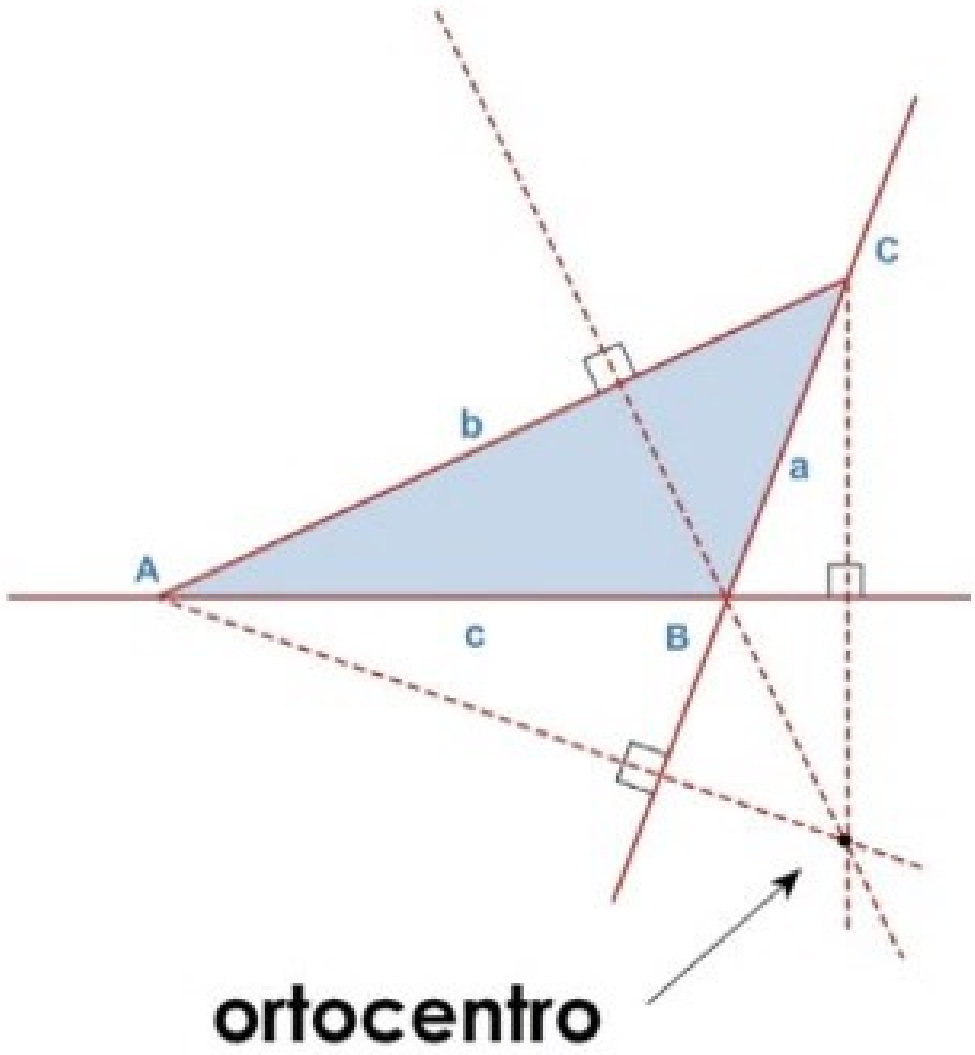
El punto de corte de ambas bisectrices equidistará de los lados AB, AC y BC.

Recordemos que la distancia desde el centro de la circunferencia a la recta tangente en cualquier punto coincide con el radio.

Por tanto: el punto de corte de las bisectrices, que equidista de los tres lados, debe ser el centro de la circunferencia inscrita.

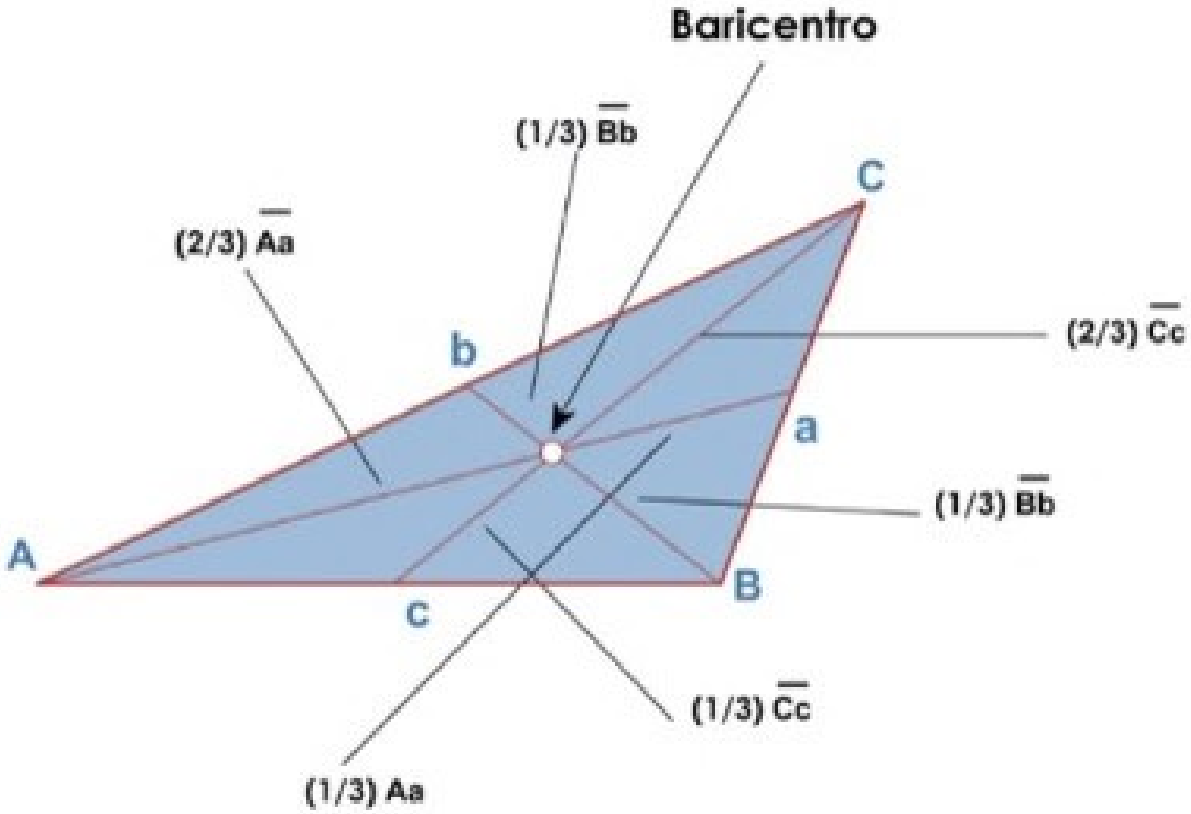
El Ortocentro

- El ortocentro (H) es el punto de corte de las tres alturas.



El Baricentro

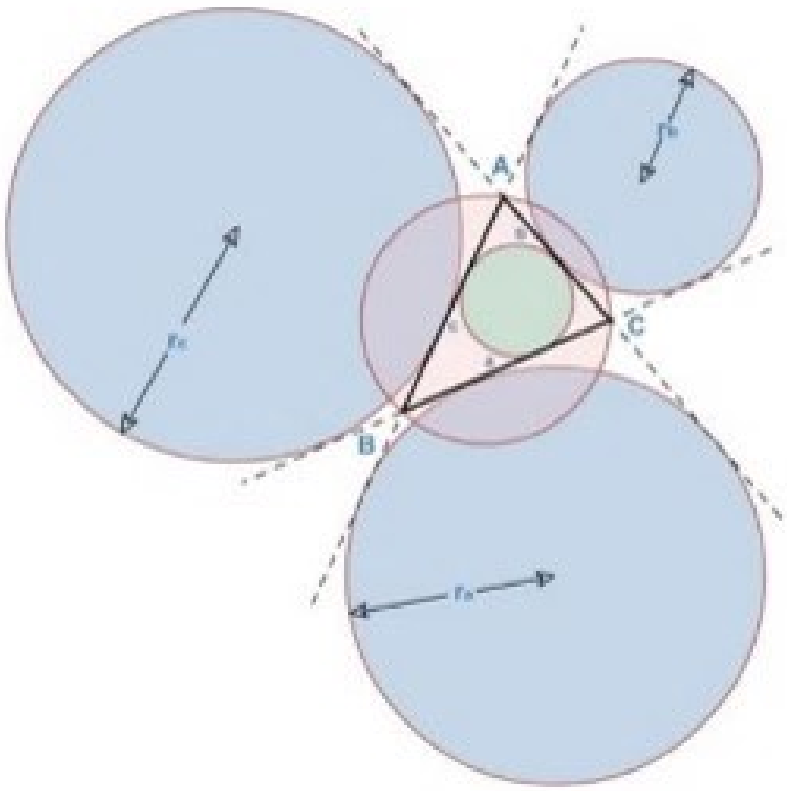
- El baricentro (G) es el centro de gravedad del triángulo y se obtiene mediante el corte de sus tres medianas (segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto). Si quisieras que un triángulo de papel se sujete sobre la punta de un lápiz, habrás de ponerlo sobre su baricentro (eso sí, cuando lo pongas, hazlo con mucho cuidado para que no se desequilibre). El baricentro tiene una propiedad muy curiosa: está sobre la mediana, a un tercio del lado y a dos tercios del vértice. Aquí tienes una demostración, en dos pasos.



El baricentro es el punto de corte de las tres medianas. Cada una de las tres medianas une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

El baricentro es el centro de gravedad del triángulo.

- Las circunferencias tangentes a los tres lados y a sus correspondientes prolongaciones reciben el nombre de exinscritas. Llamaremos r_a, r_b y r_c a los radios de las tres circunferencias exinscritas al triángulo ABC, de lados a, b y c. En la siguiente figura tienes las tres circunferencias exinscritas, la circunscrita y la inscrita.



Se cumple que O, G y H están alineados. La recta que los contiene se llama recta de Euler.

Rectas y puntos notables

En un triángulo se definen cuatro tipos de rectas denominadas, genéricamente, rectas notables. Esas rectas son: mediatrices, bisectrices, medianas y alturas. En un triángulo tendremos tres rectas de cada tipo.

Los puntos de intersección de dichas rectas se denominan puntos notables y son respectivamente: circuncentro, incentro, baricentro y ortocentro.

- mediatrices: se cortan en el circuncentro;
- bisectrices: se cortan en el incentro;
- medianas: se cortan en el baricentro;
- alturas: se cortan en el ortocentro.

Teorema de la bisectriz

En este diagrama, siendo A el ángulo bisecado, BA: AC = BD: DC.

El teorema de la bisectriz del ángulo interno de un triángulo es un teorema de la geometría elemental, la cual es una consecuencia o corolario del teorema de Thales.

> En un triángulo, la razón entre dos lados es igual a la razón de las partes en las que queda dividido el tercer lado por la bisectriz del ángulo interno opuesto.

O lo que es equivalente:

> Dado el triángulo ABC, sea AD la bisectriz del ángulo interno A, entonces se cumple la proporción: AB/AC = BD/DC

Demostración

Dibujando desde C una línea paralela a la recta AD hasta encontrar la prolongación de lado BA y encontrándose en el punto E. El triángulo ACE es isósceles porque sus ángulos C y E son congruentes ya que los dos ángulos son alternos internos respecto a las rectas paralelas AD y EC cortadas por la recta transversal AC, porque son correspondientes a las rectas paralelas AD y EC a las cuales corta la recta BE, además porque los ángulos creados por la bisectriz son iguales.

Por tanto, los segmentos AC y AE son congruentes. Por el teorema de Thales se mantiene la proporción: AB/AE = BD/DC y ya que AC y AE son congruentes, también se cumple que

$$AB/AC = BD/DC$$

Teselaciones

Hay un nuevo concepto geométrico: teselaciones. No obstante, por muy desconocido que nos resulte, está presente alrededor de nosotros más de lo que podemos considerar… ¿Ya tienen curiosidad? ¿Cómo es posible que estemos rodeados de algo que ni siquiera conocemos? Posiblemente, porque empleamos otra palabra mucho más común…

Definición

Una teselación (o teselado) consiste en el recubrimiento de una superficie plana por medio de figuras de tal forma que no exista ningún hueco entre una figura y otra, y que las figuras estén dispuestas sin superponerse unas sobre otras.

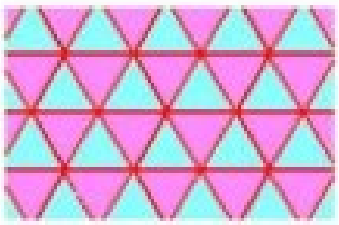
Una vez conocida la definición, y tal como podemos apreciar en la imagen, un teselado no es otra cosa que la técnica que se lleva a cabo en la construcción de mosaicos, los cuales están presentes en muchos monumentos artísticos.

En España uno de los sitios donde mayor número de teselados podemos encontrar es la Alhambra de Granada (aunque es uno de los muchos que puede haber).

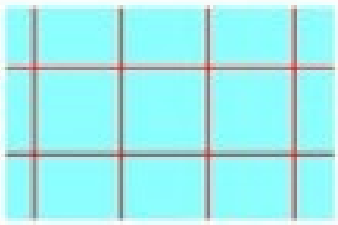
Tipos de teselados

- Teselados regulares

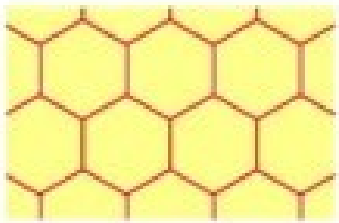
Se llaman así los teselados que están formados por polígonos regulares (aquellos polígonos que tienen todos los ángulos y todos los lados iguales), para ello es necesario que la unión de todos los vértices sume 360º. Los únicos polígonos regulares que cumplen esta condición son el triángulo, el cuadrado y el hexágono.



Triángulos



Cuadrados

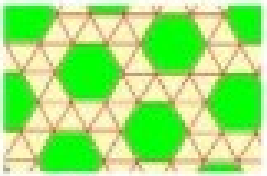


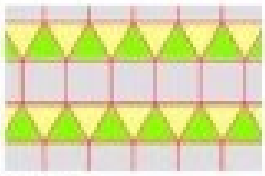
Hexágonos

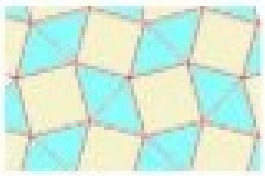
- Teselados semirregulares

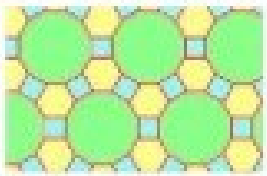
Este tipo de teselado está formado por dos o más polígonos regulares, de tal forma que en cada vértice tienen que confluir el mismo número de polígonos y de idéntica manera. Solo existen 8 tipos de teselados de esta forma.

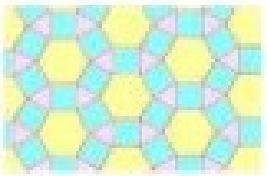
Observación: Si nos fijamos en la imagen anterior aparece el número de lados de cada uno de los polígonos que lo forman. Esta es la forma con que se distinguen los teselados y si se dan cuenta siempre se empieza nombrando el que tiene menor número de lados.

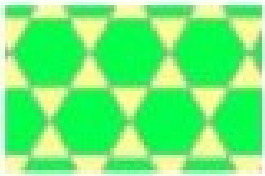

3.3.3.3.6

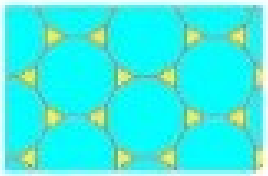

3.3.3.4.4

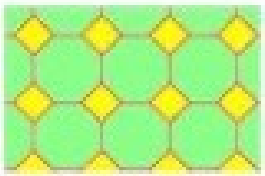

3.3.4.3.4


4.6.12


3.4.6.4

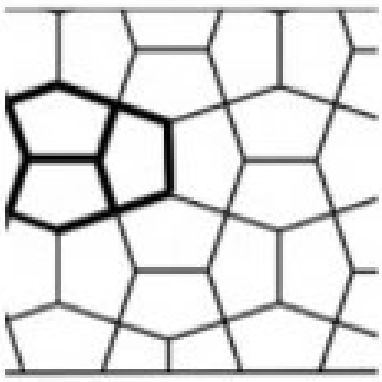

3.6.3.6


3.12.12


4.8.8

- Teselados no regulares

Como su nombre indica, en este caso son teselados que están formados por polígonos no regulares. Se cumple con cuadriláteros, triángulos (por ejemplo, el escaleno) y hexágonos (como el famoso teselado de El Cairo).



Además, también lo pueden cumplir otro tipo de figuras geométricas, como flechas o cruces.

-Otros teselados

Además de los teselados vistos, formados por figuras geométricas, existen los que están formados por superficies curvas, como en la imagen de la definición.

Uno de los artistas más destacados utilizando esta técnica es Maurits Cornelis Escher.

Y hasta aquí nuestro primer contacto con las teselaciones, o quizá no es el primero, sino solo de manera formal. De ahora en adelante, cada vez que vean un mosaico será desde otro punto de vista.

Tangram

El Tangram (chino: 七巧板 , pinyin: qī qiǎo bǎn; "siete tableros de astucia", haciendo referencia a las cualidades que el juego requiere) es un juego chino muy antiguo, que consiste en formar siluetas de figuras con las siete piezas dadas sin solaparlas. Las 7 piezas, llamadas "Tans", son las siguientes:

- **5 triángulos**, dos construidos con la diagonal principal del mismo tamaño, los dos pequeños de la franja central también son del mismo tamaño,
- **1 cuadrado,**
- **1 paralelogramo o romboide.**

Normalmente los "Tans" se guardan formando un cuadrado.

Historia del Tangram

El Tangram se originó muy posiblemente a partir del juego de muebles yanjitu durante la dinastía Song. Según los registros históricos chinos, estos muebles estaban formados originalmente por un juego de 6 mesas rectangulares. Más adelante se agregó una mesa triangular y las personas podían acomodar las mesas de manera que formaran una gran mesa cuadrada. Hubo otra variación más adelante, durante la dinastía Ming, y un poco más tarde se convirtió en un juego.

Hay una leyenda que dice que el sirviente de un emperador chino llevaba un mosaico de cerámica, muy caro y frágil, y tropezó rompiéndolo en pedazos. Desesperado, el sirviente trató de formar de nuevo el mosaico en forma cuadrada pero no pudo. Sin embargo, se dio cuenta de que podía formar muchas otras figuras con los pedazos.

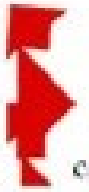
No se sabe con certeza quién inventó el juego ni cuándo, pues las primeras publicaciones chinas en la que aparece son del siglo XVIII, y entonces el juego era ya muy conocido en varios países. En China, el Tangram era muy popular y se consideraba un juego para mujeres y niños.

A partir del siglo XVIII se publicaron en América y Europa varias traducciones de libros chinos en los que se explicaban las reglas del Tangram. El juego era llamado "el rompecabezas chino" y se volvió tan popular que lo jugaban niños y adultos, personas comunes y personalidades del mundo de las ciencias y las artes; el tangram se había convertido en una diversión universal. Napoleón Bonaparte se convirtió en un verdadero especialista en Tangram desde su exilio en la isla de Santa Elena.

Usos actuales

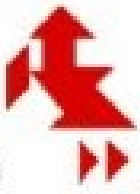
Hoy en día, el Tangram se usa como entretenimiento, en psicología, en educación física, en diseño, en filosofía y particularmente en pedagogía. En el área de enseñanza de las matemáticas el Tangram se emplea para introducir conceptos de geometría plana, y para promover el desarrollo de capacidades psicomotrices e intelectuales de los niños, pues permite ligar de manera lúdica la manipulación concreta de materiales con la formación de ideas abstractas.

Cuento

En una bella casa vivía un niño,  con su perro .

Este niño era muy alegre y le gustaba mucho bailar , pero cierto día su perro se

perdió, y el niño estaba muy triste . Hizo dibujos de su perro y se los



enseño a todos sus conocidos . Alguien le dijo que había visto a su

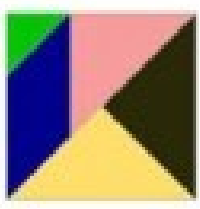
perro cerca del muelle; el muchacho corrió hasta el muelle y el perro, al ver a

su dueño corrió hacia él . Y los dos felices decidieron realizar un paseo

en bote

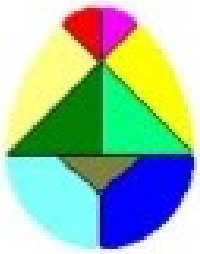
Algunas variantes del Tangram

Cardio Tangram

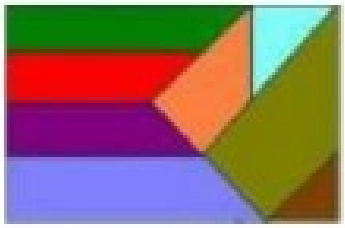


Tangram de 5 Piezas

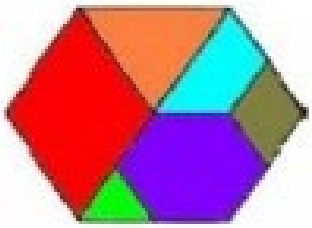
Tangram de Fletcher



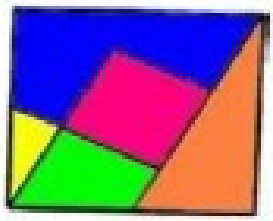
Tangram Huevo



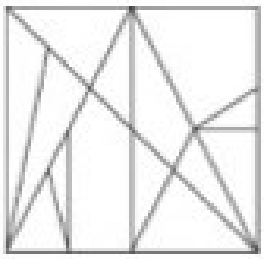
Armonigrama



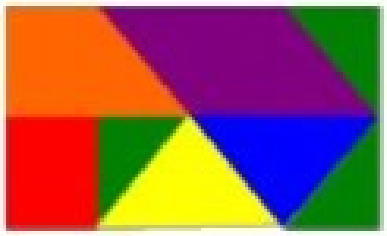
Hexagram



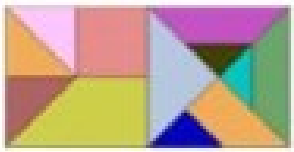
Cuadrado



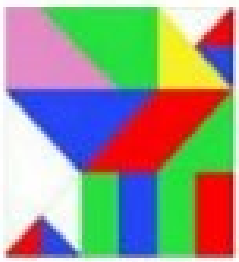
Stomachion



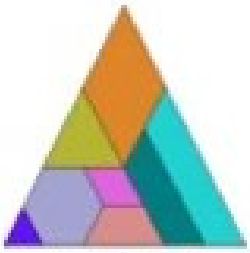
Tangram Rectángulo



Tangram de 12 Piezas

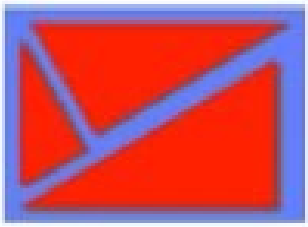


Tangram de 17 Piezas



Tangram de 8 Piezas

Tangram Pitagórico



Tangram de Brugner

Sistemas de medición: Unidades de medida

Medir es comparar una magnitud con otra que llamamos unidad.

La medida es el número de veces que la magnitud contiene a la unidad.

Las unidades de medida más usuales son las del Sistema Métrico Decimal, en los países anglosajones se emplea el Sistema Inglés.

En algunas zonas rurales aún se utilizan las unidades tradicionales.

Sistema Métrico Decimal

El metro (símbolo m) es la unidad principal de longitud del Sistema Internacional de Unidades.

Un metro es la distancia que recorre la luz en el vacío durante un intervalo de 1/299 792 458 de segundo (velocidad de la luz en el vacío). Su símbolo es *m* (adviértase que no es una abreviatura: no admite mayúscula, punto ni plural).

Unidades de longitud

kilómetro	km	1000 m
hectómetro	hm	100 m
decámetro	dam	10 m
metro	**m**	**1 m**
decímetro	dm	0.1 m
centímetro	cm	0.01 m
milímetro	mm	0.001 m

Unidades de masa (Peso)

kilogramo	kg	1000 g
hectogramo	hg	100 g
decagramo	dag	10 g
gramo	**g**	**1 g**
decigramo	dg	0.1 g
centigramo	cg	0.01 g
miligramo	mg	0.001 g

Otras unidades de masa

Tonelada métrica: *1 t = 1000 kg*

Quintal métrico: *1 q = 500 kg*

Unidades de capacidad

kilolitro	kl	1000 l
hectolitro	hl	100 l
decalitro	dal	10 l
litro	**l**	**1 l**
decilitro	dl	0.1 l
centilitro	cl	0.01 l
mililitro	ml	0.001 l

Unidades de superficie

kilómetro cuadrado	km^2	1 000 000 m^2
hectómetro cuadrado	hm^2	10 000 m^2
decámetro cuadrado	dam^2	100 m^2
metro cuadrado	**m^2**	**1 m^2**
decímetro cuadrado	dm^2	0.01 m^2
centímetro cuadrado	cm^2	0.0001 m^2
milímetro cuadrado	mm^2	0.000001 m^2

Unidades de superficie agrarias

Hectárea

1 Ha = 1 Hm^2 = 10 000 m^2

Área

1 a = 1 dam^2 = 100 m^2

Centidrea

1 ca = 1 m^2

Unidades de volumen

kilómetro cúbico	km^3	1.000.000.000 m^3
hectómetro cúbico	hm^3	1.000.000 m^3
decámetro cúbico	dam^3	1000 m^3
metro	**m^3**	**1 m^3**
decímetro cúbico	dm^3	0.001 m^3
centímetro cúbico	cm^3	0.000001 m^3
milímetro cúbico	mm^3	0.000000001 m^3

Relación entre unidades de capacidad, volumen y masa

Capacidad	Volumen	Masa (de agua)
1 kl	1 m^3	1 t
1 l	1 dm^3	1 kg
1 ml	1 cm^3	1 g

Sistema inglés

Unidades de longitud
Pulgada = 2,54 cm.
Pie = 12 pulgadas = **30,48 cm.**
Yarda = 3 pies = **91,44 cm.**
Braza = dos yardas = **182,9 cm.** = **1,829 m.**
Milla terrestre = 880 brazas = **1.609 metros.**
Milla náutica = 1.853 m.

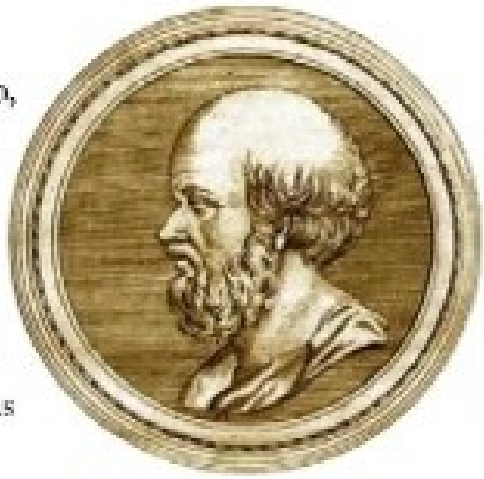
Unidades de masa

Onza = 28.3 g.
Libra = 454 g.
Unidades de capacidad
Pinta (Gran Bretaña) = 0.568 l.
Pinta (EE.UU.) = 0.473 l.
Barril = 159 l.

Unidades de superficie

Acre = 4 047 m^2.

Eratóstenes



Astrónomo, geógrafo, matemático y filósofo griego, una de las figuras más eminentes del gran siglo de la ciencia griega: el de Euclides, Arquímedes y Apolonio. Once años menor que Arquímedes, mantuvo con él relaciones de amistad y correspondencia científica. Cultivó no sólo las ciencias, sino también la poesía, la filología y la filosofía, por lo que fue llamado por sus coetáneos "pentatleta", o sea campeón de muchas especialidades.

Nacimiento	275 a.C. Cirene, Grecia Antigua; actualmente Libia
Fallecimiento	196 a.C. (Edad: 79 años) Alejandría, Grecia Antigua; actualmente Egipto
Residencia	Grecia Antigua
Nacionalidad	Cirenáico; Grecia
Campo	astronomía, matemáticas, geografía, geodesia
Conocido por	criba de Eratóstenes, medición de la Tierra, esfera armilar

Biografía

Eratóstenes era hijo de Aglaos. Estudió en Alejandría y durante algún tiempo en Atenas. Fue discípulo de Aristón de Quios, de Lisanias de Cirene y del poeta Calímaco y también gran amigo de Arquímedes. En el año 236 a. C., Ptolomeo III lo llamó para que se hiciera cargo de la Biblioteca de Alejandría, puesto que ocupó hasta el fin de sus días.

Eratóstenes poseía una gran variedad de conocimientos y aptitudes para el estudio. Astrónomo, poeta, geógrafo y filósofo, su apellido fue *Pentathlos*, nombre que se reservaba al atleta vencedor en las cinco competiciones de los Juegos Olímpicos. Suidas afirma que también era conocido como *el segundo Platón* y diversos autores dicen que se le daba el sobrenombre de Beta, por la segunda letra del alfabeto griego, porque ocupó el segundo lugar en todas las ramas de la ciencia que cultivó.

Esfera armilar

A Eratóstenes se le atribuye la invención, hacia 255 a. C., de la esfera armilar que aún se empleaba en el siglo XVII. Aunque debió de usar este instrumento para diversas observaciones astronómicas, sólo queda constancia de la que le condujo a la determinación de la oblicuidad de la eclíptica.

Determinó que el intervalo entre los trópicos (el doble de la oblicuidad de la eclíptica) equivalía a los 11/83 de la circunferencia terrestre completa, resultando para dicha oblicuidad 23º 51' 19", cifra que posteriormente adoptaría el astrónomo Claudio Ptolomeo.

Según algunos historiadores, Eratóstenes obtuvo un valor de 24º y el refinamiento del resultado se debió hasta 11/83 al propio Ptolomeo. Además, según Plutarco, de sus observaciones astronómicas durante los eclipses dedujo que la distancia al Sol era de 804.000.000 estadios, la distancia a la Luna 780.000 estadios y, según Macrobio, que el diámetro del Sol era 27 veces mayor que el de la Tierra. Realmente el diámetro del Sol es 109 veces el de la Tierra y la distancia a la Luna es casi tres veces la calculada por Eratóstenes, pero el cálculo de la distancia al Sol, admitiendo que el estadio empleado fuera de 185 metros, fue de 148.752.060 km, muy similar a la unidad astronómica actual.

Medición de las dimensiones de la Tierra

En el solsticio de verano, los rayos solares inciden perpendicularmente sobre Siena. En Alejandría, más al norte, midiendo la altura de un edificio y la longitud de la sombra que proyecta, se puede determinar el ángulo formado con el plano de la eclíptica, en el que se encuentran el Sol y la ciudad de Siena, ángulo que es precisamente la diferencia de latitud entre ambas ciudades.

Conocida esta, basta medir el arco de circunferencia y extrapolar el resultado a la circunferencia completa (360°).

Sin embargo, el principal motivo de su celebridad es, sin duda, la determinación del tamaño de la Tierra. Para ello inventó y empleó un método trigonométrico, además de las nociones de latitud y longitud, al parecer ya introducidas por Dicearco, por lo que bien merece el título de padre de la geodesia.

Por referencias obtenidas de un papiro de su biblioteca, sabía que en Siena (hoy Asuán, Egipto) el día del solsticio de verano los objetos verticales no proyectaban sombra alguna y la luz alumbraba el fondo de los pozos; esto significaba que la ciudad estaba situada justamente sobre la línea del trópico y su latitud era igual a la de la eclíptica que ya conocía.

Eratóstenes, suponiendo que Siena y Alejandría tenían la misma longitud (realmente distan 3°) y que el Sol se encontraba tan alejado de la Tierra que sus rayos podían suponerse paralelos, midió la sombra en Alejandría el mismo día del solsticio de verano al mediodía, demostrando que el cenit de la ciudad distaba 1/50 parte de la circunferencia, es decir, 7° 12' del de Alejandría.

Posteriormente, tomó la distancia estimada por las caravanas que comerciaban entre ambas ciudades, aunque bien pudo obtener el dato en la propia Biblioteca de Alejandría, fijándola en 5000 estadios, de donde dedujo que la circunferencia de la Tierra era de 250.000 estadios, resultado que posteriormente elevó hasta 252000 estadios, de modo que a cada grado correspondieran 700 estadios. También se afirma que Eratóstenes, para calcular la distancia entre las dos ciudades, se valió de un regimiento que dio pasos de tamaño uniforme y los contó.

Admitiendo que Eratóstenes usase el estadio ático-italiano de 184.8 m, que era el que solía utilizarse por los griegos de Alejandría en aquella época, el error cometido sería de 6.192 kilómetros (un 15 %). Sin embargo, hay quien defiende que empleó el estadio egipcio (300 codos de 52,4 cm), en cuyo caso la circunferencia polar calculada hubiera sido de 39614 km, frente a los 40008 km considerados en la actualidad, es decir, un error de menos del 1%.

Ahora bien, es imposible que Eratóstenes diera con la medida exacta de la circunferencia de la Tierra debido a errores en los supuestos que calculó. Tuvo que haber tenido un margen de error considerable y, por lo tanto, no pudo haber usado el estadio egipcio. Supuso que la Tierra es perfectamente esférica, lo que no es cierto. Un grado de latitud no representa exactamente la misma distancia en todas las latitudes, sino que varía ligeramente de 110,57 km en el Ecuador hasta 111,7 km en los Polos. Por eso no podemos suponer que 7° entre Alejandría y Siena representen la misma distancia que 7° en cualquier otro lugar a lo largo de todo el meridiano.

1. Supuso que Siena y Alejandría se encontraban situadas sobre un mismo meridiano, lo cual no es así, ya que hay una diferencia de 3 grados de longitud entre ambas ciudades.
2. La distancia real entre Alejandría y Siena (hoy Asuán) no es de 924 km (5000 estadios ático-italiano de 184,8 m por estadio), sino de 843 km (distancia aérea y entre los centros de las dos ciudades), lo que representa una diferencia de 81 km.
3. Realmente Siena no está ubicada exactamente sobre el paralelo del trópico de Cáncer (los puntos donde los rayos del sol caen verticalmente a la tierra en el solsticio de

verano). Actualmente se encuentra situada a 72 km (desde el centro de la ciudad). Pero debido a que las variaciones del eje de la Tierra fluctúan entre 22,1 y 24,5° en un periodo de 41000 años, hace 2000 años se encontraba a 41 km.

4. La medida de la sombra que se proyectó sobre la vara de Eratóstenes hace 2.200 años debió ser de 7,5° o 1/48 parte de una circunferencia y no 7,2° o 1/50 parte. Puesto que en aquella época no existía el cálculo trigonométrico, para calcular el ángulo de la sombra, Eratóstenes pudo haberse valido de un compás, para medir directamente dicho ángulo, lo que no permite una medida tan precisa.

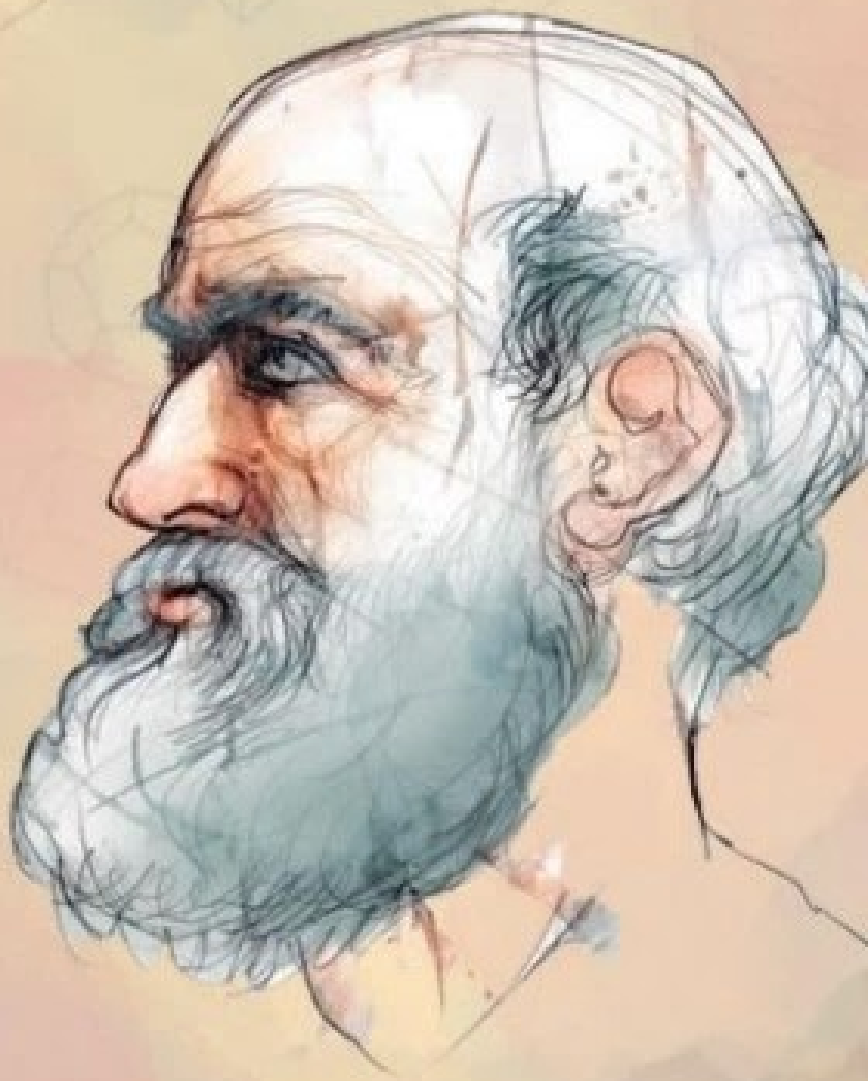
Si rehacemos el cálculo de Eratóstenes con la distancia y medida angular exacta desde Alejandría hasta el lugar geográfico situado justo en la intersección del meridiano que pasa por Alejandría con el paralelo del trópico de Cáncer, obtenemos un valor de 40074 km para la circunferencia terrestre. Eso representa solamente 66 km o un 0,16% de error de la circunferencia real de la Tierra medida por satélites avanzados, que es de 40008 km, lo que demuestra la validez de su razonamiento. Esta ligera diferencia se debe a que la distancia entre Alejandría y la línea del trópico de cáncer es 1/46 parte de una circunferencia, pero la Tierra no es una esfera perfecta.

Posidonio rehízo el cálculo de Eratóstenes 150 años más tarde y obtuvo una circunferencia sensiblemente menor. Este valor fue adoptado por Ptolomeo y fue en el que probablemente se basó Cristóbal Colón para justificar la viabilidad del viaje a las Indias por occidente. Con las mediciones de Eratóstenes, el viaje no se habría llegado a realizar, al menos en aquella época y con aquellos medios, aceptando solo las certezas científicas. Los doctores consultados en Salamanca, a petición real, se basaron en ellos para determinar que el objetivo principal —llegar a China y Japón— era imposible dada la distancia. Finalmente, la empresa fue aprobada por el rey por las ventajas estratégicas y comerciales que preveía el proyecto y sobre objetivos secundarios, como la condición de Colón de obtener prebendas y porcentajes sobre las tierras que descubriera en el camino.

El trabajo de Eratóstenes es considerado por algunos el primer intento científico en medir las dimensiones de nuestro planeta.

CAPÍTULO II

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

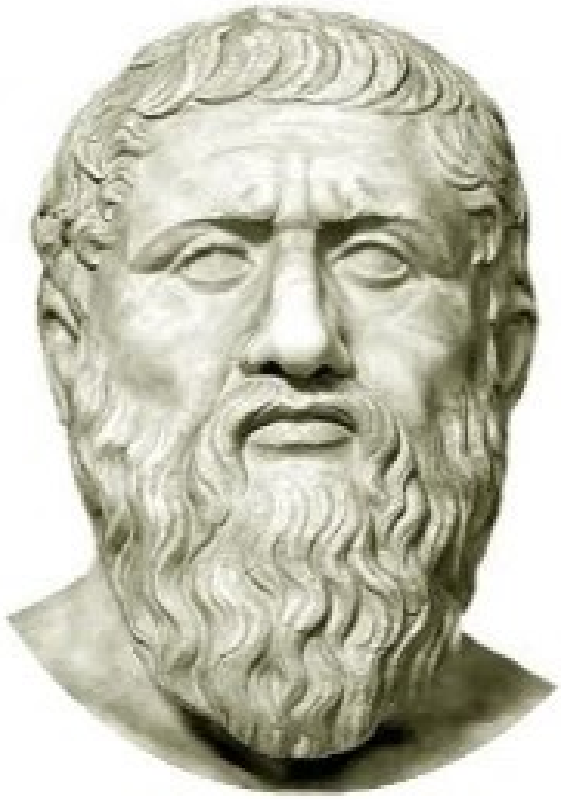


CAPÍTULO II

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Es la rama de la geometría que se ocupa de las propiedades y medidas de figuras geométricas en el espacio tridimensional. Entre estas figuras, también llamadas sólidos, se encuentran el cono, el cubo, el cilindro, la pirámide, la esfera y el prisma. Se usa ampliamente en matemáticas, en ingeniería, ciencias naturales y en arquitectura.

Platón



(Atenas, 427 - 347 a. C.) Filósofo griego. Junto con su maestro Sócrates y su discípulo Aristóteles, Platón es la figura central de los tres grandes pensadores en que se asienta toda la tradición filosófica europea.

Nacido en el seno de una familia aristocrática, Platón abandonó su inicial vocación política y sus aficiones literarias por la filosofía, atraído por Sócrates. Fue su discípulo durante veinte años y se enfrentó abiertamente a los sofistas (Protágoras, Gorgias). Tras la condena a muerte de Sócrates (399 a. C.), huyó de Atenas.

Obras de Platón

A diferencia de Sócrates, que no dejó obra escrita, los trabajos de Platón se han conservado casi completos.

Dentro de las infinitas formas poliédricas que existen hay unas que, por sus simetrías, han ejercido siempre una gran atracción sobre los hombres.

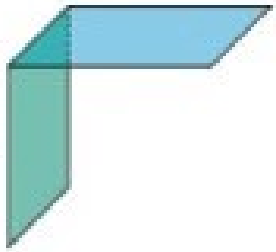
Se trata de los poliedros regulares, cuyas caras son polígonos regulares iguales entre sí y en cuyos vértices concurren el mismo número de caras.

Platón, en su obra *Timaeus*, asoció cada uno de los cuatro elementos que según los griegos formaban el universo, fuego, aire, agua y tierra a un poliedro: fuego al tetraedro, aire al octaedro, agua al icosaedro y tierra al hexaedro o cubo.

Finalmente asoció el último poliedro regular, el dodecaedro, al Universo. Por este motivo estos poliedros reciben el nombre de sólidos platónicos.

Platón y Aristóteles en La escuela de Atenas (1511), de Rafael

Ángulo diedro



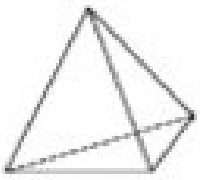
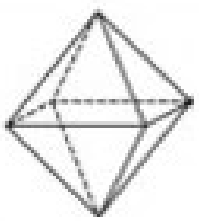
Representación axonométrica convencional de un ángulo diedro de 90°.

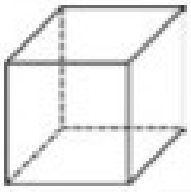
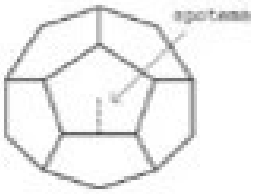
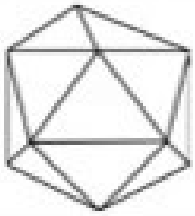
Un ángulo diedro es cada una de las dos partes del espacio delimitadas por dos semiplanos que parten de una arista común.

Triedro

Es el poliedro de tres caras. Ángulo sólido delimitado por 3 semirrectas no coplanares.

Poliedros regulares – Sólidos platónicos

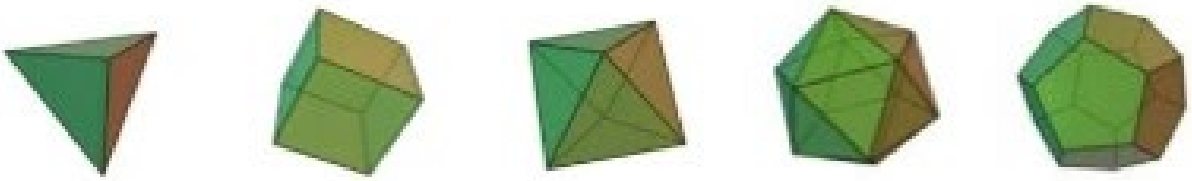
Figura	Esquema	Nº de caras	Área
Tetraedro		4 caras, triángulos equiláteros	$A = a^2 \cdot \sqrt{3}$
Octaedro		8 caras, triángulos equiláteros	$A = 2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$

Cubo		6 caras, cuadrados	$A = 6\ a^2$
Dodecaedro		12 caras, pentágonos regulares	$A = 30 \cdot a \cdot ap.$
Icosaedro		20 caras, triángulos equiláteros	$A = 5 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$

Para Platón, hay cinco sólidos tridimensionales de aristas, ángulos y caras iguales, tales sólidos platónicos son: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el icosaedro y el dodecaedro. Hace esta exposición en su diálogo el *Timeo*, en el que plantea que la quinta combinación (dodecaedro) a Dios le sirvió para trazar el plano del universo.

Los sólidos platónicos o regulares son poliedros convexos tal que todas sus caras son polígonos regulares iguales entre sí, y en que todos los ángulos sólidos son iguales. También se conocen como cuerpos platónicos, cuerpos cósmicos, sólidos pitagóricos, sólidos perfectos, poliedros de Platón o, en base a propiedades geométricas, poliedros regulares convexos.

El nombre cubo en árabe, *Kaaba*, nombra un santuario sumamente venerado en el Islam.



Tetraedro – Fuego | Cubo – Tierra | Octaedro – Aire | Icosaedro – Agua | Dodecaedro – Eter o Akasha

El éter

Era una hipotética sustancia extremadamente ligera que se creía que ocupaba todos los espacios vacíos como un fluido. En las creencias griegas el éter era una sustancia brillante que respiraban los dioses, en contraste con el pesado aire que respiran los mortales.

Regularidad

Tal y como se ha expresado para definir estos poliedros:

- Todas las caras de un sólido platónico son polígonos regulares iguales.

- En todos los vértices de un sólido platónico concurren el mismo número de caras y de aristas.
- Todas las aristas de un sólido platónico tienen la misma longitud.
- Todos los ángulos diedros que forman las caras de un sólido platónico entre sí son iguales.
- Todos sus ángulos interiores son convexos.

Simetría

- El centro de un cubo (de un octaedro regular) es centro de simetría de dicha figura, devuelve la misma figura; mas no lo es el centro de un tetraedro regular. Todos ellos gozan respecto a un punto del espacio (centro de simetría) que equidista de sus caras, de sus vértices y de sus aristas, pero no se conserva la figura original.
- Todos ellos tienen además simetría axial.
- Todos ellos tienen también simetría especular respecto a planos.

Como consecuencia geométrica de lo anterior, se pueden trazar en todo sólido platónico tres esferas particulares, todas ellas centradas en el centro de simetría del poliedro:

- Una esfera inscrita, tangente a todas sus caras en su centro.
- Una segunda esfera tangente a todas las aristas en su centro.
- Una esfera circunscrita, que pase por todos los vértices del poliedro.

Descripción

Diagrama que muestra el enfoque del matemático Ibo Bonilla para la relación entre los 5 sólidos platónicos tradicionales, la esfera y sexaedro que propone con la flor de la vida.

Poliedro	Nº de Caras	Nº de Vértices	Nº de aristas	Orden de los vértices	Nº de lados de las caras
Tetraedro	4	4	6	3	3
Cubo	6	8	12	3	4
Octaedro	8	6	12	4	3
Dodecaedro	12	20	30	3	5
Icosaedro	20	12	30	5	3

Flor de la vida y los 7 sólidos platónicos

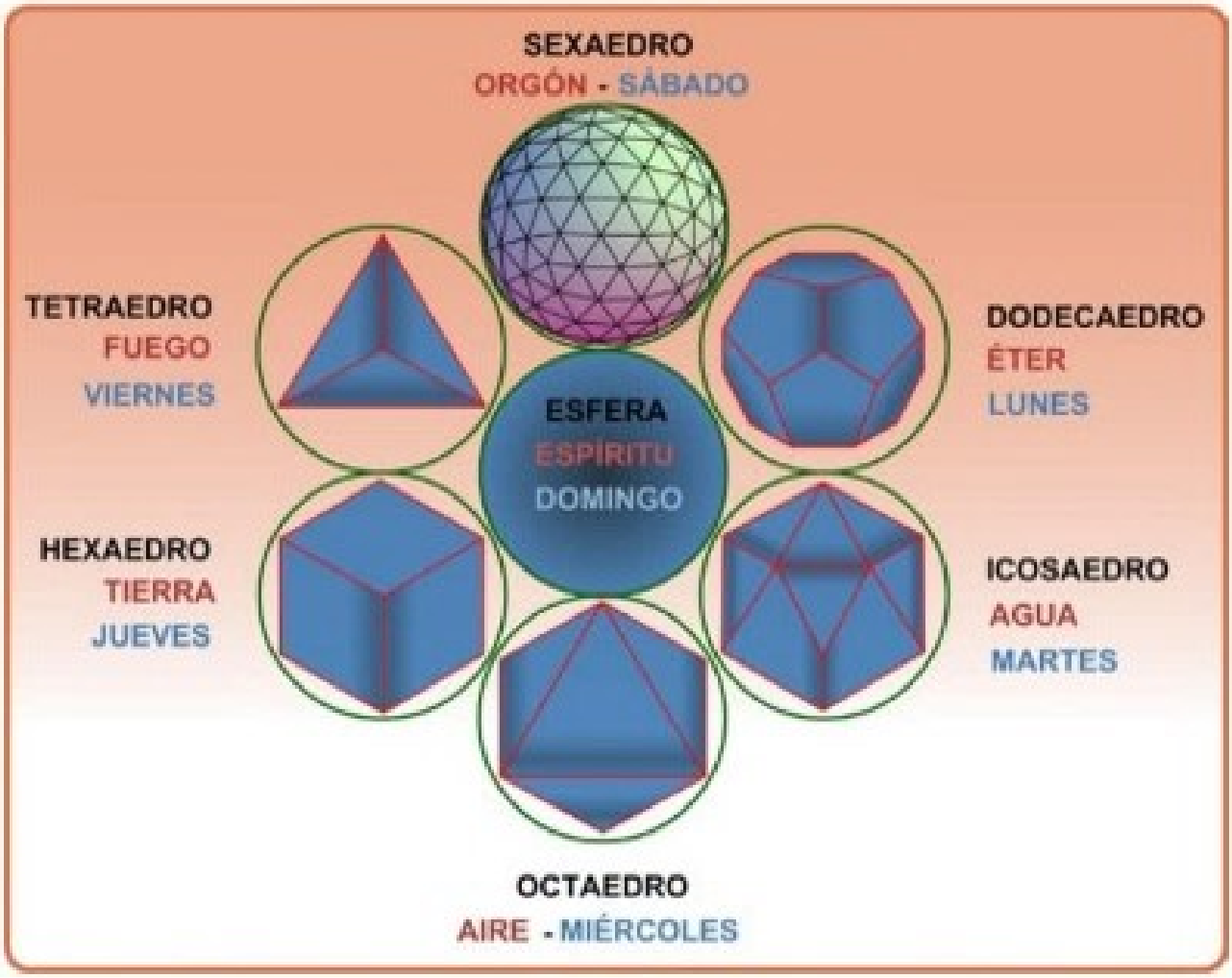
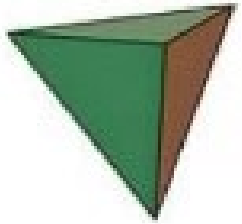
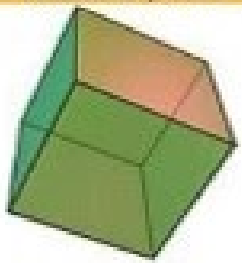
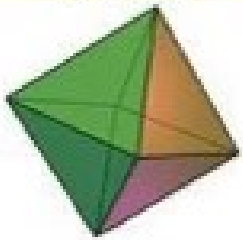
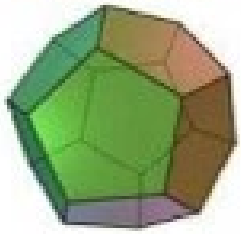
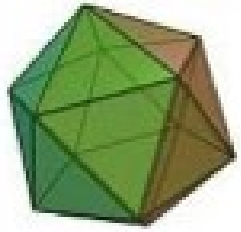
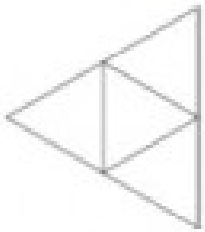
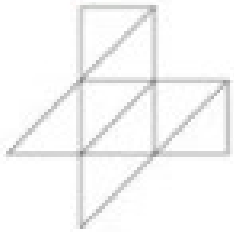


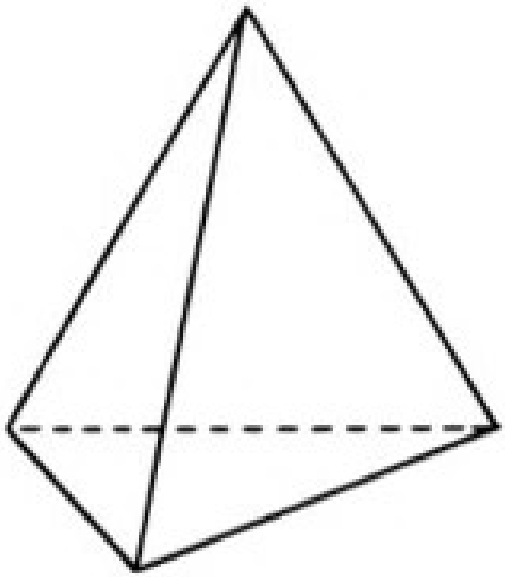
Tabla comparativa

Sólidos Platónicos	Tetraedro	Hexaedro, Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
					
Desarrollo					
Número de caras	4	6	8	12	20
Polígonos que forman las caras	Triángulos Equiláteros	Cuadrados	Triángulos Equiláteros	Pentágonos Regulares	Triángulos Equiláteros
Número de aristas	6	12	12	30	30
Número de vértices	4	8	6	20	12
Caras concurrentes en cada vértice	3	3	4	3	5
Vértices contenidos en cada cara	3	4	3	5	3
Poliedro conjugado	Tetraedro (autoconjugado)	Octaedro	Hexaedro, Cubo	Icosaedro	Dodecaedro
Ángulo diedro	70.53° = arccos(1/3)	90°	109.47° = arccos(-1/3)	116.56°	138.189685°
Radio externo	$R = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot a$	$R = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$	$R = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a$	$R = \frac{\sqrt{6}}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot a$	$R = \frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
≈	$0.612 \cdot a$	$0.866 \cdot a$	$0.707 \cdot a$	$1.401 \cdot a$	$0.951 \cdot a$
Radio interno	$r = \frac{\sqrt{6}}{12} \cdot a$	$r = \frac{a}{2}$	$r = \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot a$	$r = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{50+22\sqrt{5}}{5}}$	$r = \frac{a}{12}\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)$
≈	$0.204 \cdot a$	$0.5 \cdot a$	$0.408 \cdot a$	$1.113 \cdot a$	$0.756 \cdot a$

Tetraedro

Un **tetraedro** es un poliedro de cuatro caras. Con este número de caras ha de ser un poliedro convexo, y sus caras triangulares, encontrándose tres de ellas en cada vértice. Si las cuatro caras del tetraedro son triángulos equiláteros, iguales entre sí, el tetraedro se denomina *regular*. El tetraedro es el símplex tridimensional.

Propiedades geométricas



En todo tetraedro, sea o no regular, se verifica que:

- Los segmentos que unen los puntos medios de los tres pares de aristas opuestas son concurrentes en un punto, que los divide por su mitad.
- Los segmentos que unen cada vértice con los puntos de intersección de las medianas de su cara opuesta son también concurrentes en un punto, que los divide separando tres cuartas partes del lado del vértice respectivo (Teorema de Commandino).
- Los seis planos perpendiculares a las aristas por sus puntos medios pasan por un mismo punto, centro de la esfera circunscrita al tetraedro.
- Las rectas perpendiculares a las caras por su circuncentro son concurrentes en un punto, centro de la esfera circunscrita al tetraedro.
- Los planos bisectores de los diedros interiores de un tetraedro concurren en un punto equidistante de las cuatro caras, centro de la esfera inscrita al tetraedro.

Propiedades métricas

- Volumen:

$$V = \frac{1}{6} \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot h$$

Esta fórmula es aplicable para calcular, de forma aproximada, el volumen de un terraplén, de una carretera o una presa de materiales sueltos, por ejemplo, a partir de la longitud de su coronación l_1, la longitud en la base l_2, y su altura h.

- Área:

El Área de un tetraedro es la siguiente:

$A_{\text{tetraedro}} = 4\,A_c$, donde A_c es el área de una de sus caras.

Tetraedro regular

Es un poliedro formado por cuatro caras que son triángulos equiláteros, y cuatro vértices en cada uno de los cuales concurren tres caras. Es uno de los cinco poliedros *perfectos* llamados sólidos platónicos. Además, es uno de los ocho poliedros convexos denominados deltaedros.

Un **deltaedro** es un poliedro cuyas caras son triángulos equiláteros iguales. El nombre tiene su origen en la letra griega delta (Δ), cuya grafía mayúscula recuerda un triángulo equilátero. Aplicándole la nomenclatura estándar de los sólidos de Johnson podría ser denominado pirámide triangular.

Para la escuela pitagórica el tetraedro representaba el elemento fuego, puesto que pensaban que las partículas (átomos) del fuego tenían esta forma.

Cálculo de dimensiones fundamentales

Exclusivamente a partir de la arista **a** se pueden calcular el resto de las dimensiones fundamentales de un tetraedro regular. Así, para las esferas singulares del tetraedro:

- Radio **R** de la esfera circunscrita al tetraedro (la que contiene en su superficie los cuatro vértices de este):

$$R = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot a \approx 0,6124 \cdot a$$

- Radio **r** de la esfera inscrita al tetraedro (la tangente a las cuatro caras del tetraedro):

$$r = \frac{\sqrt{6}}{12} \cdot a \approx 0,2041 \cdot a$$

- Radio **ρ** de la esfera tangente a las seis aristas del tetraedro:

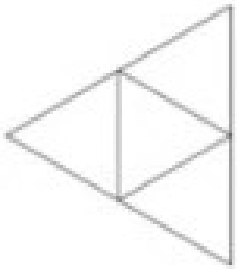
$$\rho = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot a \approx 0,3536 \cdot a$$

En un tetraedro regular cada pareja de aristas opuestas (las que no concurren en un mismo vértice) es ortogonal entre sí, siendo la mínima distancia entre ellas el segmento que une sus puntos medios, de longitud doble al radio **ρ** de la esfera tangente a las aristas del tetraedro.

- La altura **H** del tetraedro (apoyado el tetraedro de manera estable sobre un plano horizontal, distancia perpendicular desde el plano de apoyo al vértice opuesto):

$$H = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot a \approx 0,8165 \cdot a$$

Volumen, área y desarrollo



Dado un tetraedro regular de arista **a**, podemos calcular su volumen **V** mediante la siguiente fórmula:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3 \approx 0,1179 \cdot a^3$$

Y el área total de sus caras **A** (que es 4 veces el área de una de ellas, $\mathbf{A_c}$), mediante:

$$A = 4 \cdot A_c = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 = \sqrt{3} \cdot a^2 \approx 1,732 \cdot a^2$$

Ángulos

Los ángulos planos que forman las aristas concurrentes son, como en el resto de los sólidos platónicos, todos iguales; y con un valor de 60º (p/3 rad), al constituir los ángulos interiores de un triángulo equilátero.

Los ángulos diedros que forman las caras son, como en el resto de los sólidos platónicos, todos iguales, y pueden calcularse:

$$\delta = 2 \cdot \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 1,23 \text{ rad } (70°31'43,61'')$$

Los ángulos sólidos que forman los vértices son, como en el resto de los sólidos platónicos, todos iguales, y pueden calcularse:

$$\omega = \frac{A_c}{H^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2}{\left(\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot a\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} sr \approx 0,650 \text{ sr}$$

Proyecciones

Las proyecciones ortogonales de un tetraedro regular sobre un plano pueden ser:

- Triángulos:

En particular, si el plano de proyección es paralelo a una cara, la proyección del tetraedro es un triángulo equilátero, correspondiente a una cara en verdadera magnitud.

- Cuadriláteros:

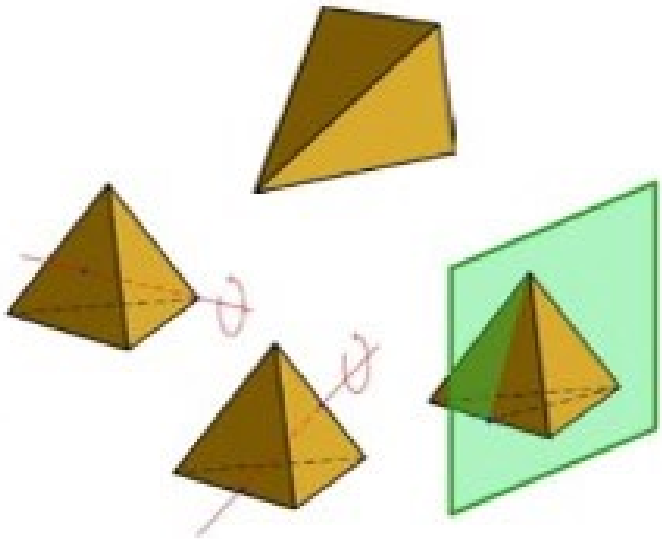
En particular, si el plano de proyección es paralelo a dos aristas opuestas del tetraedro, la proyección es un cuadrado, con un lado igual a la longitud de la arista del tetraedro dividida por la raíz cuadrada de dos.

Propiedades particulares

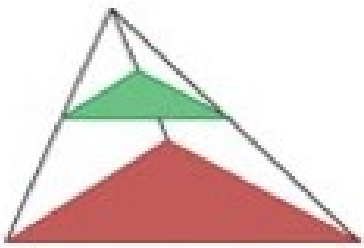
Simetría

Rotaciones en torno a un eje y reflexión respecto a un plano de un tetraedro regular.

Un tetraedro regular tiene cuatro ejes de simetría de orden tres, las rectas perpendiculares a cada cara por el vértice opuesto de tetraedro; y seis planos de simetría, los formados por cada arista y el punto medio de la arista opuesta. Esto hace que este cuerpo tenga un orden de simetría total de 24: 2x (4x3).



Secciones



Sección transversal.

Las infinitas secciones que podemos tomar de un tetraedro regular pueden resultar:

- Triángulos:

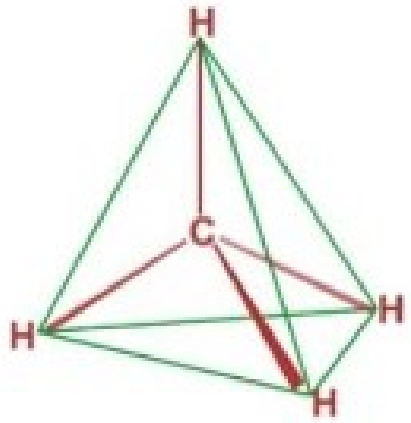
En particular, cualquier sección tomada por un plano paralelo a una de las caras del tetraedro es un triángulo equilátero.

- Cuadriláteros:

En particular, cualquier sección tomada por un plano paralelo a dos aristas opuestas es un rectángulo.

Si, además de ser paralelo a dos aristas opuestas, el plano de corte equidista de ambas, la sección resultante es un cuadrado de lado mitad de la arista del tetraedro. Como existen tres pares de aristas opuestas, un tetraedro regular se puede seccionar de esta forma por tres planos diferentes.

Tetraedros en la naturaleza y en la técnica



Estructura tetraédrica del metano. Los enlaces C-H están dirigidos hacia los vértices de un tetraedro regular.

La forma tetraédrica aparece en la naturaleza en ciertas moléculas de enlace covalente. La más común de ellas es la molécula de metano (CH_4), en la que los cuatro átomos de hidrógeno se sitúan aproximadamente en los cuatro vértices de un tetraedro regular del que el átomo de carbono es el centro.

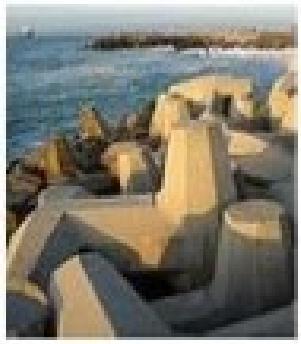
Existen también estructuras cristalinas naturales de forma tetraédrica. A pesar de ser el tetraedro un poliedro de forma simple y totalmente regular, no existen muchos objetos de uso común basados en su forma.

Como medio de almacenamiento es una forma desastrosa: no es posible rellenar el espacio con ella, que sería la forma de no desperdiciar volumen entre las piezas; tampoco resulta fácilmente apilable al no tener caras paralelas; y, además, es muy ineficaz: para contener un litro de producto son necesarios más de 7,2 dm^2 de «pared», mientras que utilizando un cubo con 6 dm^2 es suficiente. A pesar de todos estos inconvenientes, la empresa sueca Tetra Pak desarrolló un envase de cartón metalizado en forma tetraédrica en la década de 1950, únicamente porque su fabricación resultaba singularmente sencilla: bastaba con enrollar una hoja de papel formando un cilindro, para después aplastar sus dos extremos, pero en direcciones perpendiculares, logrando con ello un tetraedro.

En cualquier posición que sea apoyado un tetraedro, uno de sus vértices queda vertical hacia arriba. Por este motivo se basa en su forma la fabricación de ciertos modelos de elementos móviles de balizamiento de carreteras ya que, al ser indiferente la posición en la que se apoyen, su colocación es rápida y sencilla, y no pueden ser derribados por los vehículos.

Tetrápodos para escollera.

Es una forma sencilla con gran facilidad para trabarse y engancharse, puesto que sus vértices son muy agudos y dirigidos en las cuatro direcciones. Por este motivo, se busca su forma en elementos cuya principal función sea engancharse, como las anclas de barco (en esquema, un ancla está formada por las dos aristas opuestas de un tetraedro unidas por su perpendicular), o trabarse entre sí, como las escolleras de hormigón armado para



defensa contra el oleaje. Existen al menos tres modelos de uso frecuente basados en la forma de un tetraedro regular.

Por ejemplo, tetrápodos formados por cuatro troncos de cono colocados según las alturas de un tetraedro regular, entre sus vértices y su centro.

Arquímedes

Arquímedes (Siracusa, actual Italia, 287 a.C. - 212 a.C.) fue el matemático más grande de su época. Sus contribuciones a la geometría revolucionaron la materia y sus métodos anticiparon el cálculo integral 2.000 años antes de Newton y Leibniz. Fue también un hombre profundamente práctico que inventó una amplia variedad de máquinas que incluían poleas y el aparato de bombeo llamado el 'tornillo de Arquímedes'. Los grandes progresos de las matemáticas y la astronomía del helenismo son deudores, en buena medida, de los avances científicos anteriores y del legado del saber oriental, pero también de las nuevas oportunidades que brindaba el mundo helenístico. En los inicios de la época helenística se sitúa Euclides, quien legó a la posteridad una prolífica obra de síntesis de los conocimientos de su tiempo que afortunadamente se conservó casi íntegra y se convirtió en un referente casi indispensable hasta la Edad Contemporánea.

Pero el más célebre y prestigioso matemático fue Arquímedes. Sus escritos, de los que se han conservado una decena, son prueba elocuente del carácter polifacético de su saber científico. Hijo del astrónomo Fidias, quien probablemente lo introdujo en las matemáticas, aprendió de su padre los elementos de aquella disciplina en la que estaba destinado a superar a todos los matemáticos antiguos, hasta el punto de aparecer como prodigioso, "divino", incluso para los fundadores de la ciencia moderna.

Sus estudios se perfeccionaron en aquel gran centro de la cultura helenística que era la Alejandría de los Tolomeos.

Allí, después de aprender la no despreciable cultura matemática de la escuela (hacía poco que había muerto el gran Euclides), estrechó relaciones de amistad con otros grandes matemáticos, entre los cuales figuraba Eratóstenes, con el que mantuvo siempre correspondencia, incluso después de su regreso a Sicilia. A Eratóstenes dedicó Arquímedes su *Método*, en el que expuso la aplicación de la mecánica a la geometría, en la que «pesaba» imaginariamente áreas y volúmenes desconocidos para determinar su valor. Regresó luego a Siracusa, donde se dedicó de lleno al trabajo científico.

Al parecer, más tarde volvió a Egipto durante algún tiempo como "ingeniero" de Tolomeo, y diseñó allí su primer gran invento, la "coclea", una especie de máquina

que servía para elevar las aguas y regar de este modo regiones a las que no llegaba la inundación del Nilo. Pero su actividad madura de científico se desenvolvió por completo en Siracusa, donde gozaba del favor del tirano Hierón II.

Sus inventos mecánicos son muchos, y más aún los que le atribuyó la leyenda (entre estos últimos debemos rechazar el de los espejos ustorios, inmensos espejos con los que habría incendiado la flota romana que sitiaba Siracusa); pero son históricas, además de la "coclea", numerosas máquinas de guerra destinadas a la defensa militar de la ciudad, así como una "esfera", grande e ingenioso planetario mecánico que, tras la toma de Siracusa, fue llevado a Roma como botín de guerra, y allí lo vieron todavía Cicerón y quizás Ovidio.

Arquímedes en su representación más tradicional: abstraído y meditabundo.

Plutarco atribuyó una inteligencia sobrehumana a este gran matemático e ingeniero.

La más divulgada de las anécdotas la relata Vitruvio y se refiere al método que utilizó para comprobar si existió fraude en la confección de una corona de oro encargada por Hierón II, tirano de Siracusa y protector de Arquímedes, y quizás incluso pariente suyo. Se cuenta que el tirano, sospechando que el joyero le había engañado poniendo plata en el interior de la corona, pidió a Arquímedes que determinase los metales de que estaba compuesta sin romperla.

Arquímedes meditó largo tiempo en el difícil problema, hasta que un día, hallándose en un establecimiento de baños, advirtió que el agua se desbordaba de la bañera a medida que se iba introduciendo en ella. Esta observación le inspiró la idea que le permitió resolver la cuestión que le planteó el tirano: si sumergía la corona en un recipiente lleno hasta el borde y medía el agua que se desbordaba, conocería su volumen; luego podría comparar el volumen de la corona con el volumen de un objeto de oro del mismo peso y comprobar si eran iguales. Se cuenta que, impulsado por la alegría, Arquímedes corrió desnudo por las calles de Siracusa hacia su casa gritando «¡Eureka! ¡Eureka!», es decir, «¡Lo encontré! ¡Lo encontré!».

La idea de Arquímedes está reflejada en una de las proposiciones iniciales de su obra *Sobre los cuerpos flotantes*, pionera de la hidrostática, que sería estudiada cuidadosamente

por los fundadores de la ciencia moderna, entre ellos Galileo. Corresponde al famoso principio de Arquímedes (todo cuerpo sumergido en un líquido experimenta un empuje hacia arriba igual al peso del volumen de agua que desaloja), y, como allí se explica, haciendo uso de él es posible calcular la ley de una aleación, lo cual le permitió descubrir que el orfebre había cometido fraude.

Según otra anécdota famosa, recogida entre otros por Plutarco, Arquímedes se hallaba tan entusiasmado por la potencia que conseguía con sus máquinas, capaces de levantar grandes pesos con esfuerzo relativamente pequeño, que aseguró al tirano que, "si le daban un punto de apoyo, conseguiría mover la Tierra"; exhortado por el rey a que pusiera en práctica su aseveración, logró sin esfuerzo, mediante un complicado sistema de poleas, poner en movimiento un navío de tres mástiles con su carga.

Análoga concentración mental y abstracción en la meditación demuestra el episodio de su muerte. Según se dice, los ingenios bélicos cuya paternidad le atribuye la tradición permitieron a Siracusa resistir tres años el asedio romano, antes de caer en manos de las tropas de Marcelo. Mientras saqueaban Siracusa los soldados de Marcelo, que al fin habían conseguido expugnar la ciudad, el viejo matemático estaba meditando, olvidado de todo, en sus problemas de geometría.

Sorprendido por un soldado que le preguntó quién era, Arquímedes no le respondió, o, según otra versión, le respondió irritado que no lo molestara ni le estropeara los dibujos que había trazado en la arena; y el soldado, encolerizado, lo mató. Marcelo se entristeció mucho al saberlo y mandó que le levantaran un monumento, sacando su figura del tratado *Sobre la esfera y el cilindro*. Cicerón reconoció por esta figura, muchos años más tarde, su tumba olvidada.

Esta pasión de Arquímedes por la erudición, que le causó la muerte, fue también la que, en vida, se dice que hizo que se olvidara hasta de comer y que soliera entretenerse trazando dibujos geométricos en las cenizas del hogar o incluso, al ungirse, en los aceites que cubrían su piel. Esta imagen contrasta con la del inventor de máquinas de guerra del que hablan Polibio y Tito Livio; pero, como señala Plutarco, su interés por esa maquinaria estribó únicamente en el hecho de que planteó su diseño como mero entretenimiento intelectual.

El esfuerzo de Arquímedes por convertir la estática en un cuerpo doctrinal riguroso es comparable al realizado por Euclides con el mismo propósito respecto a la geometría. Tal esfuerzo se refleja de modo especial en dos de sus libros; en el primero de ellos, *Equilibrios planos*, fundamentó la ley de la palanca, deduciéndola a partir de un número reducido de postulados, y determinó el centro de gravedad de paralelogramos, triángulos, trapecios y el de un segmento de parábola.

En la obra *Sobre la esfera y el cilindro* utilizó el método denominado de exhaustión, precedente del cálculo integral, para determinar la superficie de una esfera y para establecer la relación entre una esfera y el cilindro circunscrito en ella. Este último resultado pasó por ser su teorema favorito, que por expreso deseo suyo se grabó sobre su tumba, hecho gracias al cual Cicerón pudo recuperar la figura de Arquímedes cuando esta había sido ya olvidada.

Si bien la faceta de inventor de Arquímedes es quizás la más popular, también realizó importantes contribuciones al campo de las matemáticas.

Arquímedes utilizó el método exhaustivo para lograr el valor aproximado del número π . Fue capaz de utilizar los infinitesimales de forma similar al moderno cálculo integral. A través de la reducción al absurdo (*reductio ad absurdum*), era capaz de resolver problemas mediante aproximaciones con determinado grado de precisión, especificando los límites entre los cuales se encontraba la respuesta correcta. Esta técnica recibe el nombre de método exhaustivo, y fue el sistema que utilizó para aproximar el valor del número π. Para ello, dibujó un polígono regular inscrito y otro circunscrito a una misma circunferencia, de manera que la longitud de la circunferencia y el área del círculo quedan acotadas por esos mismos valores de las longitudes y las áreas de los dos polígonos. A medida que se incrementa el número de lados del polígono la diferencia se acorta, y se obtiene una aproximación más exacta. Partiendo de polígonos de 96 lados cada uno, Arquímedes calculó que el valor de π debía encontrarse entre $3^{10}/_{71}$ (aproximadamente 3,1408) y $3^{1}/_{7}$ (aproximadamente 3,1429), lo cual es consistente con el valor real de π. También demostró que el área del círculo era igual a π multiplicado por el cuadrado del radio del círculo. En su obra *Sobre la esfera y el cilindro*, Arquímedes postula que cualquier magnitud, sumada a sí misma suficiente número de veces, puede exceder cualquier otra magnitud dada, postulado que es conocido como la propiedad arquimediana de los números reales.

En su obra sobre la *Medición del círculo*, Arquímedes ofrece un intervalo para el valor de la raíz cuadrada de 3 de entre $^{265}/_{153}$ (aproximadamente 1,7320261) y $^{1351}/_{780}$ (aproximadamente 1,7320512). El valor real se ubica aproximadamente en 1,7320508, por lo que la estimación de Arquímedes resultó ser muy exacta. Sin embargo, introdujo este resultado en su obra sin explicación de qué método había utilizado para obtenerlo.

En su obra sobre *La cuadratura de la parábola*, Arquímedes probó que el área definida por una parábola y una línea recta equivalía exactamente a $^{4}/_{3}$ el área del correspondiente triángulo inscrito. Para obtener ese resultado, desarrolló una serie geométrica infinita con una razón común de $^{1}/_{4}$:

El primer término de esta suma equivale al área del triángulo, el segundo sería la suma de las áreas de los dos triángulos inscritos en las dos áreas delimitadas por el triángulo y la parábola, y así sucesivamente. Esta prueba utiliza una variación de la serie infinita $^{1}/_{4} + {}^{1}/_{16} + {}^{1}/_{64} + {}^{1}/_{256} + \ldots$, cuya suma se demuestra que equivale a $^{1}/_{3}$.

En otra de sus obras Arquímedes se enfrentó al reto de intentar calcular el número de granos de arena que podía contener el universo. Para hacerlo, desafió la idea de que el número de granos fuera tan grande como para poder ser contados. Escribió: *Existen algunos, Rey Gelón, que creen que el número de granos de arena es infinito en multitud; y cuando me refiero a la arena me refiero no solo a la que existe en Siracusa y el resto de Sicilia sino también la que se puede encontrar en cualquier región, ya sea habitada o deshabitada.*

Arquímedes, para poder afrontar el problema, diseñó un sistema de cálculo basado en la miríada. Se trata de una palabra que procede del griego μυριάς (*murias*) y que servía para hacer referencia al número 10 000. Propuso un sistema en el que se utilizaba

una potencia de una miríada de miríadas (100 millones) y concluía que el número de granos de arena necesarios para llenar el universo sería de 8×10^{63}.[53]

Trabajos conservados

- ***Sobre el equilibrio de los planos*** (dos volúmenes)

El primer libro consta de quince proposiciones con siete axiomas, mientras que el segundo consta de diez proposiciones. En esta obra, Arquímedes explica la ley de la palanca, afirmando lo siguiente: "Las magnitudes están en equilibrio a distancias recíprocamente proporcionales a sus pesos."

Usa los principios derivados para calcular las áreas y los centros de gravedad de varias figuras geométricas, incluyendo triángulos, paralelogramos y parábolas.

- ***Sobre la medida de un círculo***

Se trata de una obra corta, consistente en tres proposiciones. En la proposición II, Arquímedes muestra que el valor del número π (Pi) es mayor que 223/71 y menor que 22/7. Esta cifra fue utilizada como aproximación de π a lo largo de la Edad Media e incluso aún hoy se utiliza cuando se requiere de una cifra aproximada.

- ***Sobre las espirales***

Esta obra está compuesta de 28 proposiciones. El tratado define lo que hoy se conoce como la espiral de Arquímedes. Esta espiral representa el lugar geométrico en el que se ubican los puntos correspondientes a las posiciones de un punto que es desplazado hacia afuera desde un punto fijo con una velocidad constante y a lo largo de una línea que rota con una velocidad angular constante. Este es uno de los primeros ejemplos en los que un matemático griego define una curva mecánica (una curva trazada por un punto en movimiento).

- ***Sobre la esfera y el cilindro*** (dos volúmenes)

En este tratado, dirigido también a Dositeo, Arquímedes llega a la conclusión matemática de la que estaría más orgulloso, esto es, la relación entre una esfera y cilindro circunscrito en ella. La esfera tiene un área y un volumen equivalentes a dos tercios de los del cilindro. A pedido del propio Arquímedes, se colocaron sobre su tumba las esculturas de estos dos cuerpos geométricos.

- ***Sobre los conoides y esferoides***

Este es un trabajo en 32 proposiciones y también dirigido a Dositeo en el que Arquímedes calcula las áreas y los volúmenes de las secciones de conos, esferas y paraboloides.

- ***Sobre los cuerpos flotantes*** (dos volúmenes)

En la primera parte de este tratado, Arquímedes explica la ley del equilibrio de los líquidos, y prueba que el agua adopta una forma esférica alrededor de un centro de gravedad. Esto puede haber sido un intento de explicar las teorías de astrónomos griegos contemporáneos, como Eratóstenes, que afirmaban que la tierra es esférica. Los líquidos

descritos por Arquímedes no son auto-gravitatorios, debido a que él asume la existencia de un punto hacia el cual caen todas las cosas, del cual deriva la forma esférica.

En la segunda parte, Arquímedes calcula las posiciones de equilibrio de las secciones de los paraboloides. Esto fue, probablemente, una idealización de las formas de los cascos de los barcos. Algunas de sus secciones flotan con la base bajo el agua y la parte superior sobre el agua, de una manera similar a como flotan los icebergs. Arquímedes define en su obra el principio de flotabilidad de la siguiente manera: "Todo cuerpo sumergido en un líquido experimenta un empuje vertical y hacia arriba igual al peso de líquido desalojado."

- La cuadratura de la parábola

En este trabajo de 24 proposiciones, dirigido a Dositeo, Arquímedes prueba a través de dos métodos distintos que el área cercada por una parábola y una línea recta es 4/3 multiplicado por el área de un triángulo de igual base y altura. Obtiene este resultado calculando el valor de una serie geométrica que suma al infinito con el radio 1/4.

- Ostomachion

Esta obra se encontró dentro del Palimpsesto de Arquímedes. Presenta un rompecabezas de disección similar a un tangram. Arquímedes calcula las áreas de 14 piezas que pueden ser ensambladas para formar un cuadrado. Una investigación publicada en 2003 por Reviel Netz de la Universidad de Stanford argumentaba que Arquímedes estaba intentando determinar en cuántas formas se podían ensamblar las piezas para formar un cuadrado. Según Netz, las piezas pueden formar un cuadrado de 17.152 maneras distintas. El número de disposiciones se reduce a 536 cuando se excluyen las soluciones que son equivalentes por rotación y reflexión. Este puzle representa un ejemplo temprano de un problema de combinatoria.

***- El problema del ganado* de Arquímedes**

Esta obra fue descubierta por Gotthold Ephraim Lessing en un manuscrito griego consistente en un poema de 44 líneas, en la Herzog August Library en Wolfenbüttel, Alemania, en 1773. Está dirigida a Eratóstenes y a los matemáticos de Alejandría y, en ella, Arquímedes los reta a contar el número de reses en la Manada del Sol, resolviendo un número de ecuaciones diofánticas simultáneas. Hay una versión más difícil del problema en la cual se requiere que algunas de las respuestas sean números cuadrados. Esta versión del problema fue resuelta por primera vez por A. Amthor en 1880, y la respuesta es un número muy grande, aproximadamente $7{,}760271\times10^{206544}$.[62]

- El contador de arena

En este tratado, Arquímedes cuenta el número de granos de arena que entrarían en el universo. Este libro menciona la teoría heliocéntrica del sistema solar propuesta por Aristarco de Samos, e ideas contemporáneas acerca del tamaño de la Tierra y las distancias de varios cuerpos celestes. Usando un sistema de números basado en la capacidad de la miríada, Arquímedes concluye que el número de granos de arena que se requerirían para llenar el universo sería de 8×10^{63}, en notación moderna. La carta introductoria afirma que el padre de Arquímedes era un astrónomo llamado Fidias. *El*

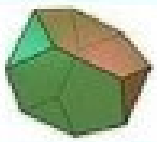
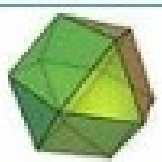
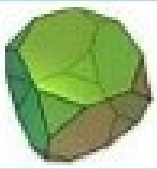
contador de arena o *Psammites* es la única obra superviviente de Arquímedes en la que se trata su visión de la astronomía.

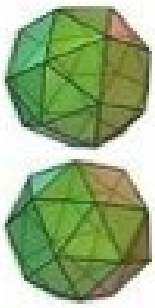
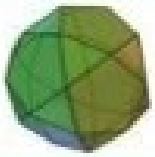
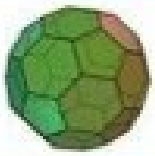
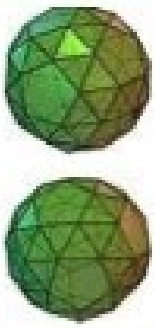
- ***El método de teoremas mecánicos***

Este tratado, que se consideraba perdido, fue reencontrado gracias al descubrimiento del Palimpsesto de Arquímedes en 1906. En esta obra, Arquímedes emplea el cálculo infinitesimal, y muestra cómo el método de fraccionar una figura en un número infinito de partes infinitamente pequeñas puede ser usado para calcular su área o volumen. Arquímedes pudo haber considerado que este método carecía del suficiente rigor formal, por lo que utilizó también el método exhaustivo para llegar a los resultados. Al igual que *El problema del ganado*, *El método de teoremas mecánicos* fue escrito en forma de una carta dirigida a Eratóstenes de Alejandría.

Sólidos de Arquímedes

Sólidos arquimedianos o sólidos de Arquímedes son un grupo de poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares de dos o más tipos. La mayoría de ellos se obtienen truncando los sólidos platónicos.

Sólidos Arquimedianos					
Nombre	**Imagen**	**Caras**	**Aristas**	**Vértices**	**Grupo puntual**
Tetraedro truncado		8 (4 × hr, 4 × te)	18	12 × 3·6·6	T_d
Cuboctaedro		14 (6 × cu, 8 × te)	24	12 × 3·4·3·4	O_h
Cubo truncado		14 (6 × or, 8 × te)	36	24 × 3·8·8	O_h
Octaedro truncado		14 (8 × hr, 6 × cu)	36	24 × 4·6·6	O_h
Rombicuboctaedro o rombicuboctaedro menor		26 (18 × cu, 8 × te)	48	24 × 3·4·4·4	O_h
Cuboctaedro truncado o rombicuboctaedro mayor		26 (6 × or, 8 × hr, 12 × cu)	72	48 × 4·6·8	O_h

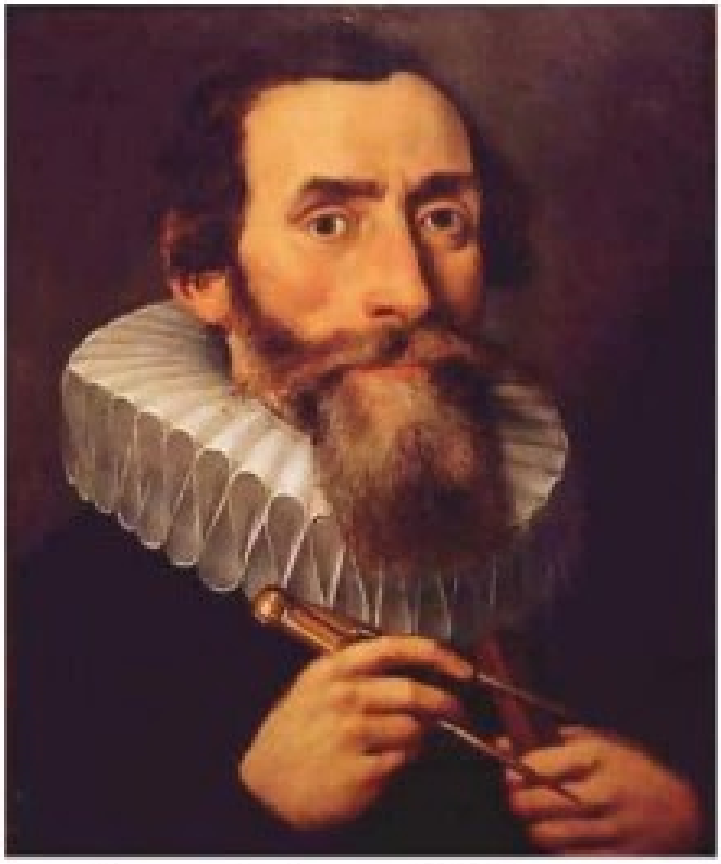
Cubo romo o cuboctaedro romo (2 formas isomórficas)		38	6 × cu 32 × te	60	24 × 3·3·3·3·4	O
Icosidodecaedro		32	12 × pr 20 × te	60	30 × 3·5·3·5	I_h
Dodecaedro truncado		32	12 × dr 20 × te	90	60 × 3·10·10	I_h
Icosaedro truncado		32	20 × hr 12 × pr	90	60 × 5·6·6	I_h
Rombicosidodecaedro o rombicosidodecaedro menor		62	12 × pr 30 × cu 20 × te	120	60 × 3·4·5·4	I_h
Icosidodecaedro truncado o rombicosidodecaedro mayor		62	12 × dr 20 × hr 30 × cu	180	120 × 4·6·10	I_h
Dodecaedro romo o icosidodecaedro romo (2 formas isomórficas)		92	12 × pr 80 × te	150	60 × 3·3·3·3·5	I

dr = decágonos regulares; or = octógonos regulares; hr = hexágonos regulares
pr = pentágonos regulares; cu = cuadrados; te = triángulos equiláteros

JOHANNES KEPLER

Biografía

Kepler, nacido prematuramente a los siete meses de embarazo, e hipocondríaco de naturaleza endeble, sufrió toda su vida una salud frágil. A pesar de su salud, fue



un niño brillante al que le gustaba impresionar con sus fenomenales facultades matemáticas.

Sus padres le despertaron el interés por la astronomía. Con cinco años, observó el cometa de 1577. Su padre le mostró a la edad de nueve años el eclipse de luna del 31 de enero de 1580, en el que la Luna aparecía bastante roja. Kepler estudió más tarde el fenómeno y lo explicó en una de sus obras de óptica.

Su profesor de matemáticas, el astrónomo Michael Maestlin, le enseñó el sistema heliocéntrico de Copérnico. Los otros estudiantes tomaban como cierto el sistema geocéntrico de Ptolomeo, que afirmaba que la Tierra estaba inmóvil y ocupaba el centro del Universo, y que el Sol, la Luna, los planetas y las estrellas giraban a su alrededor. Kepler se hizo así un copernicano y mantuvo una relación muy estrecha con Maestlin.

Se trasladó a Praga, donde fue invitado por Tycho Brahe, que había leído algunos trabajos de Kepler. Al año siguiente, Tycho Brahe falleció y Kepler lo sustituyó en el cargo de matemático imperial de Rodolfo II y trabajó frecuentemente como consejero astrológico.

Kepler murió en 1630 en Ratisbona, en Baviera, Alemania, a la edad de 58 años.

En 1632, durante la Guerra de los Treinta Años, el ejército sueco destruyó su tumba y se perdieron sus trabajos hasta el año 1773. Recuperados por Catalina II de Rusia, se encuentran actualmente en el Observatorio de Pulkovo en San Petersburgo, Rusia.

Obra científica

Kepler intentó comprender las leyes del movimiento planetario durante la mayor parte de su vida. En un principio Kepler consideró que el movimiento de los planetas debía cumplir las leyes pitagóricas de la armonía. Esta teoría es conocida como la música o la armonía de las esferas celestes. En su visión cosmológica **no era casualidad que el número de planetas conocidos en su época fuera uno más que el número de poliedros perfectos**. Siendo un firme partidario del modelo copernicano, intentó demostrar que las distancias de los planetas al Sol venían dadas por esferas en el interior de poliedros perfectos, anidadas sucesivamente unas en el interior de otras. En la esfera interior estaba Mercurio mientras que los otros cinco planetas (Venus, Tierra, Marte, Júpiter y Saturno) estarían situados en el interior de los cinco sólidos platónicos correspondientes también a los cinco elementos clásicos.

Hasta 1602, a la muerte de Tycho, Kepler no consiguió tener acceso a todos los datos recopilados por Tycho, mucho más precisos que los manejados por Copérnico. A la

vista de los datos, especialmente los relativos al movimiento retrógrado de Marte se dio cuenta de que el movimiento de los planetas no podía ser explicado por su modelo de poliedros perfectos y armonía de esferas. Kepler se dedicó con tesón ilimitado a probar con toda suerte de combinaciones de círculos. Cuando se convenció de la imposibilidad de lograrlo con círculos, usó elipses. Con ellas desentrañó sus famosas tres leyes (publicadas en 1609 en su obra *Astronomia Nova*) que describen el movimiento de los planetas. Leyes que asombraron al mundo, le revelaron como el mejor astrónomo de su época. ¿Por qué elipses, habiendo círculos? Sin embargo, tres siglos después, su intuición se vio confirmada cuando Einstein mostró en su Teoría de la Relatividad general que en la geometría tetradimensional del espacio-tiempo los cuerpos celestes siguen líneas rectas. Y es que aún había una figura más simple que el círculo: la recta.

Un biógrafo de la época con admiración se lamentaba de que un hombre de su sabiduría, en la última etapa de su vida, tuviese demencia senil, llegando incluso a afirmar que "las mareas venían motivadas por una atracción que la luna ejercía sobre los mares...", un hecho que fue demostrado años después de su muerte.

En su honor una cadena montañosa del satélite marciano Fobos fue bautizada con el nombre de 'Kepler Dorsum'.

Las tres leyes de Kepler

"Si los planetas son lugares imperfectos, ¿por qué no han de serlo sus órbitas?". Finalmente utilizó la fórmula de la elipse, una rara figura descrita por Apolonio de Pérgamo en una de las obras salvadas de la destrucción de la biblioteca de Alejandría. Descubrió que encajaba perfectamente en las mediciones de Tycho.

Había descubierto su primera ley, la primera ley de Kepler:

Los planetas tienen movimientos elípticos alrededor del Sol, estando este situado en uno de los 2 focos que contiene la elipse.

Después de ese importante salto, en donde por primera vez los hechos se anteponían a los deseos y los prejuicios sobre la naturaleza del mundo, Kepler se dedicó simplemente a observar los datos y sacar conclusiones ya sin ninguna idea preconcebida. Pasó a comprobar la velocidad del planeta a través de las órbitas llegando a la **segunda ley**:

Las áreas barridas por los radios de los planetas son proporcionales al tiempo empleado por estos en recorrer el perímetro de dichas áreas.

Durante mucho tiempo, Kepler sólo pudo confirmar estas dos leyes en el resto de los planetas. Aun así, fue un logro espectacular, pero faltaba relacionar las trayectorias de los planetas entre sí. Tras varios años, descubrió la **tercera** e importantísima ley del movimiento planetario:

El cuadrado de los períodos de la órbita de los planetas es proporcional al cubo de la distancia promedio al Sol.

Esta ley, llamada también ley armónica, junto con las otras leyes, permitía ya unificar, predecir y comprender todos los movimientos de los astros.

Sólidos Cóncavos

Estrellas de Kepler

Sólidos de Kepler-Poinsot						
Nombre	Imagen	Caras	Aristas	Vértices		Simetría
K_1 **Pequeño dodecaedro estrellado**		12	12 × pg	30	12	$12 \times 5/2^5$	I_h
K_2 **Gran dodecaedro estrellado**		12	12 × pg	30	20	$20 \times 5/2^3$	I_h
K_3 **Gran icosaedro**		20	20 × tc	30	12	$12 \times 3^{5/2}$	I_h
K_4 **Gran dodecaedro**		12	12 × pr	30	12	$12 \times 5^{3/2}$	I_h
pg = pentagramas; pr = pentágonos regulares tc = triángulos equiláteros						

Eugène Charles Catalan

Eugène Charles Catalan (30 de mayo de 1814 - 14 de febrero de 1894) fue un matemático francés y belga que trabajó en la teoría de números.

Biografía

Nació en Brujas, Bélgica, en 1814. En 1825 viajó a París y aprendió matemática en la École Polytechnique. En 1834 fue expulsado de la universidad y pasó a Châlons-sur-Marne, donde recibió un

puesto tras su graduación. En 1838 volvió a la École Polytechnique y, con la ayuda de Liouville, obtuvo su título en matemáticas en 1841. Fue entonces al Charlemagne College a enseñar geometría descriptiva. Era políticamente activo y extremadamente izquierdista. Participó en la revolución de 1848.

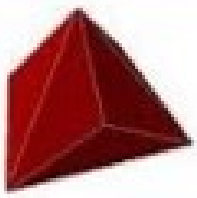
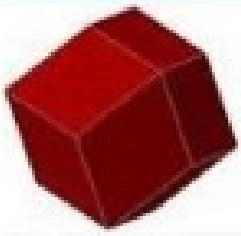
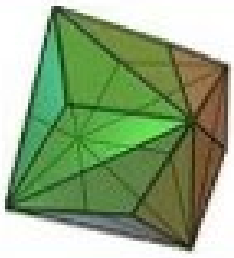
La Universidad de Lieja le concedió la cátedra de análisis matemático en 1865. En 1883 trabajó para la Academia Belga de las Ciencias en el campo de la teoría de números. Murió en Lieja, Bélgica.

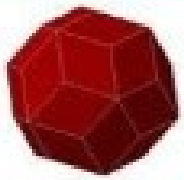
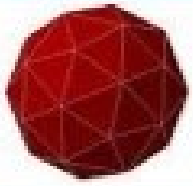
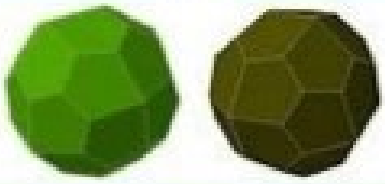
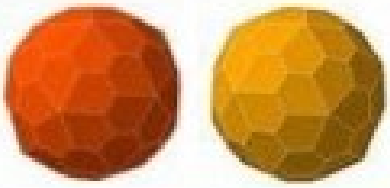
Trabajos

Trabajó en fracciones continuas, geometría descriptiva, teoría de números y combinatoria. Dio su nombre a una superficie única (superficie periódica mínima en el espacio) que descubrió en 1855. Anteriormente había enunciado la famosa conjetura de Catalan, que fue publicada en 1844 y probada finalmente en 2002 por el matemático rumano Preda Mihăilescu. Introdujo los números de Catalan para resolver un problema combinatorio.

Los sólidos de Caralan son una familia de poliedros que se generan con el poliedro dual de los sólidos de Arquímedes.

Todos son poliedros convexos de caras uniformes aunque no de vértices uniformes; esto ocurre ya que los Sólidos de Arquímedes que los generan son de vértices uniformes y no de caras uniformes. Las caras que forman un sólido de Catalan no son polígonos regulares, pero sus ángulos diédricos son iguales en todo el poliedro. Además dos de ellos son poliedros de aristas uniformes: el rombododecaedro y el triacontaedro rómbico, y dos de ellos tienen figura isomórfica: el icositetraedro pentagonal y el hexecontaedro pentagonal.

Sólidos de Catalan		
Nombre: **Triaquistetraedro** Dual:Tetraedro truncado Cara:Triángulos Isósceles		12 caras 18 aristas 8 vértices
Nombre: **Rombododecaedro** Dual:Cuboctaedro Cara:Rombos		12 caras 24 aristas 14 vértices
Nombre: **Triaquisoctaedro** Dual:Cubo truncado Cara:Triángulos Isósceles		24 caras 36 aristas 14 vértices

Nombre: **Tetraquishexaedro** Dual:Octaedro truncado Cara:Triángulos Isósceles		24 caras 36 aristas 14 vértices
Nombre: **Icositetraedro deltoidal** Dual:Rombicuboctaedro Cara:Deltoides		24 caras 48 aristas 26 vértices
Nombre: **Hexaquisoctaedro** Dual:Cuboctaedro truncado Cara:Triángulos escalenos		48 caras 72 aristas 26 vértices
Nombre: **Triacontaedro rómbico** Dual:Icosidodecaedro Cara:Rombos		30 caras 60 aristas 32 vértices
Nombre: **Triaquisicosaedro** Dual:Dodecaedro truncado Cara:Triángulos Isósceles		60 caras 90 aristas 32 vértices
Nombre: **Pentaquisdodecaedro** Dual:Icosaedro truncado Cara:Triángulos isósceles		60 caras 90 aristas 32 vértices
Nombre: **Hexecontaedro deltoidal** Dual:Rombicosidodecaedro Cara:Deltoides		60 caras 120 aristas 62 vértices
Nombre: **Hexaquisicosaedro** Dual:Icosidodecaedro truncado Cara:Triángulos Escalenos		120 caras 180 aristas 62 vértices
Nombre: **Icositetraedro pentagonal** Dual:Cubo romo Cara:Pentágonos Irregulares		24 caras 60 aristas 38 vértices
Nombre: **Hexecontaedro pentagonal** Dual:Icosidodecaedro romo Cara:Pentágonos irregulares		60 caras 150 aristas 92 vértices

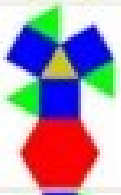
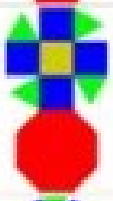
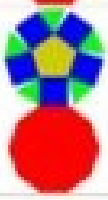
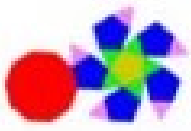
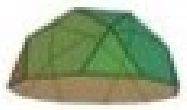
Sólidos de Johnson

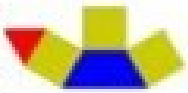
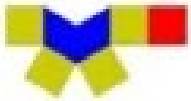
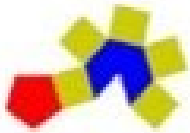
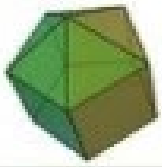
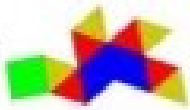
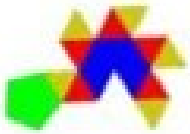
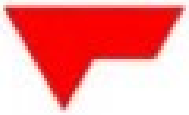
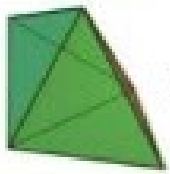
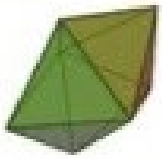
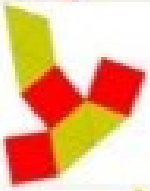
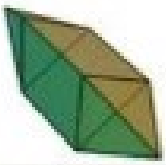
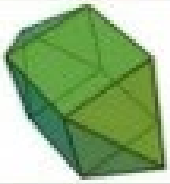
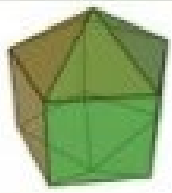
Historia

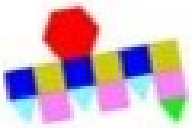
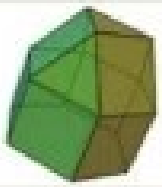
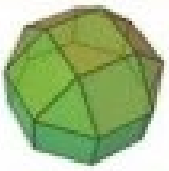
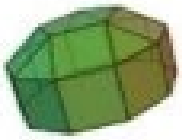
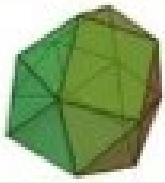
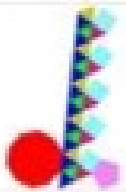
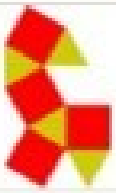
En 1966 el matemático norteamericano Norman Johnson (1930 – 2016) publicó una lista de 92 sólidos, dándole nombres y número. Aunque no probó la imposibilidad de que existieran otros sólidos, hizo tal conjetura, y en 1969 Victor Zalgaller demostró que la lista era completa.

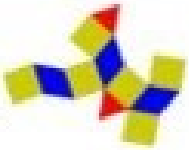
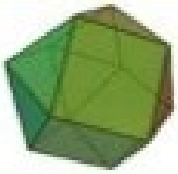
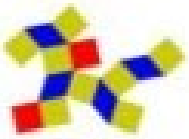
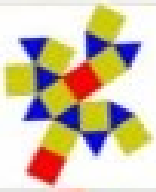
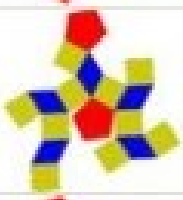
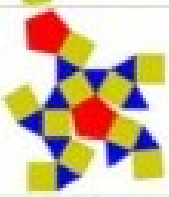
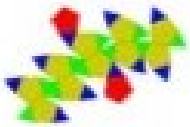
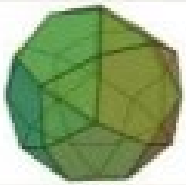
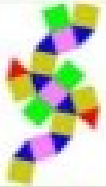
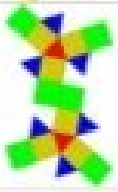
Entre los sólidos enumerados, la girobicúpula cuadrada elongada (J_{37}) resulta única por tener vértices uniformes; cuatro caras concurren a cada vértice y su disposición es siempre la misma: tres cuadrados y un triángulo.

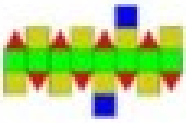
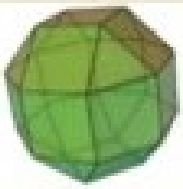
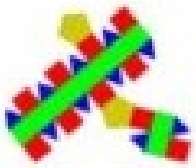
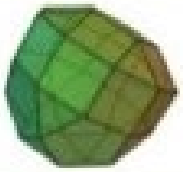
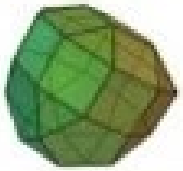
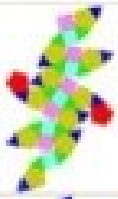
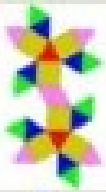
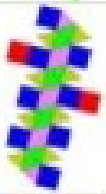
Enumeración

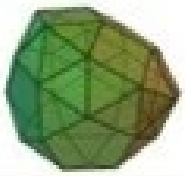
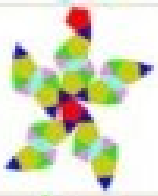
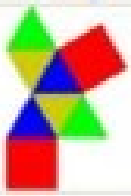
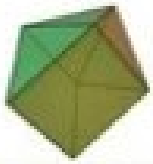
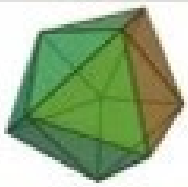
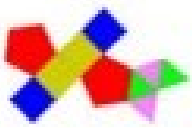
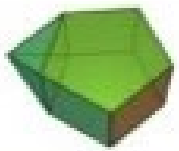
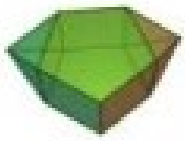
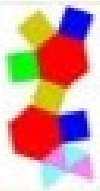
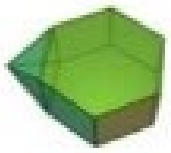
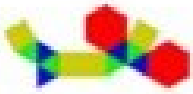
J_n	Nombre	Desarrollo	Imagen	V	E	F	F_3	F_4	F_5	F_6	F_8	F_{10}	Simetría
1	Pirámide cuadrada			5	8	5	4	1					C_{4v}
2	Pirámide pentagonal			6	10	6	5		1				C_{5v}
3	Cúpula triangular			9	15	8	4	3		1			C_{3v}
4	Cúpula cuadrada			12	20	10	4	5			1		C_{4v}
5	Cúpula pentagonal			15	25	12	5	5	1			1	C_{5v}
6	Rotonda pentagonal			20	35	17	10		6			1	C_{5v}

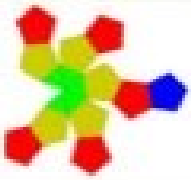
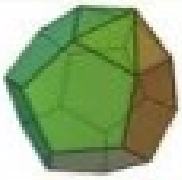
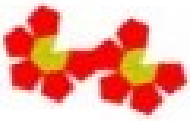
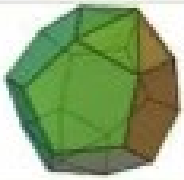
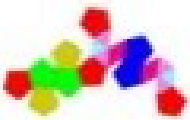
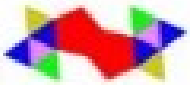
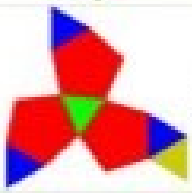
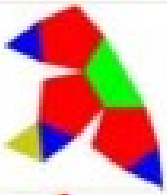
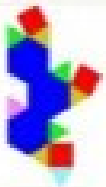
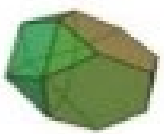
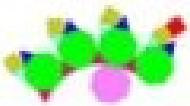
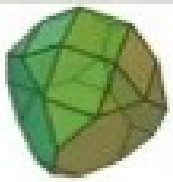
J_n	Nombre	Desarrollo	Imagen	V	E	F	F_3	F_4	F_5	F_6	F_8	F_{10}	Simetría
7	Pirámide triangular elongada (o tetraedro elongado)			7	12	7	4	3					C_{3v}
8	Pirámide cuadrada elongada (o cubo aumentado)			9	16	9	4	5					C_{4v}
9	Pirámide pentagonal elongada			11	20	11	5	5	1				C_{5v}
10	Pirámide cuadrada giroelongada			9	20	13	12	1					C_{4v}
11	Pirámide pentagonal giroelongada (o icosaedro disminuido)			11	25	16	15		1				C_{5v}
12	Bipirámide triangular			5	9	6	6						D_{3h}
13	Bipirámide pentagonal			7	15	10	10						D_{5h}
14	Bipirámide triangular elongada			8	15	9	6	3					D_{3h}
15	Bipirámide cuadrada elongada (o cubo biaumentado)			10	20	12	8	4					D_{4h}
16	Bipirámide pentagonal elongada			12	25	15	10	5					D_{5h}

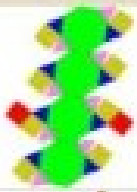
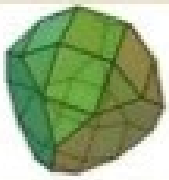
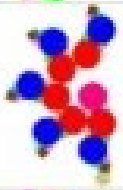
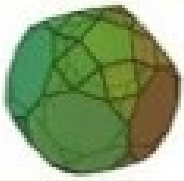
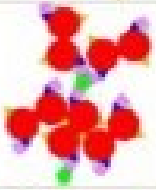
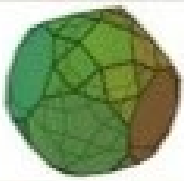
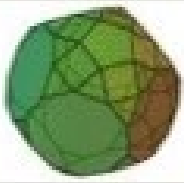
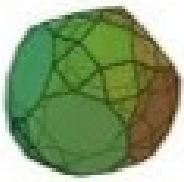
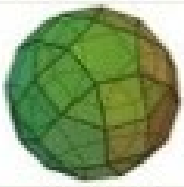
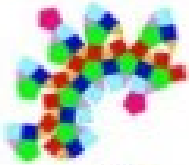
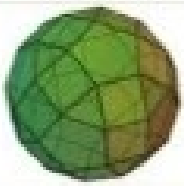
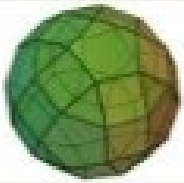
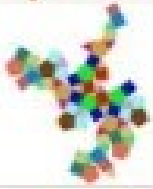
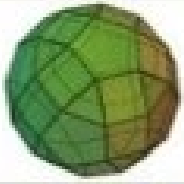
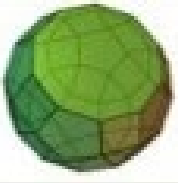
J_n	Nombre	Desarrollo	Imagen	V	E	F	F_3	F_4	F_5	F_6	F_8	F_{10}	Simetría
17	Bipirámide cuadrada giroelongada			10	24	16	16						D_{4d}
18	Cúpula triangular elongada			15	27	14	4	9		1			C_{3v}
19	Cúpula cuadrada elongada *(Rombicuboctaedro disminuido)*			20	36	18	4	13			1		C_{4v}
20	Cúpula pentagonal elongada			25	45	22	5	15	1			1	C_{5v}
21	Rotonda pentagonal elongada			30	55	27	10	10	6			1	C_{5v}
22	Cúpula triangular giroelongada			15	33	20	16	3		1			C_{3v}
23	Cúpula cuadrada giroelongada			20	44	26	20	5			1		C_{4v}
24	Cúpula pentagonal giroelongada			25	55	32	25	5	1			1	C_{5v}
25	Rotonda pentagonal giroelongada			30	65	37	30		6			1	C_{5v}
26	Girobifastigium			8	14	8	4	4					D_{2d}

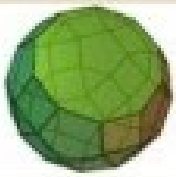
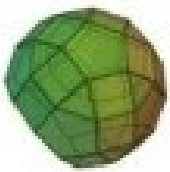
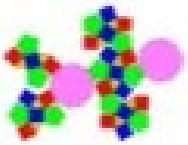
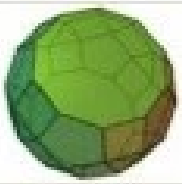
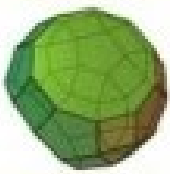
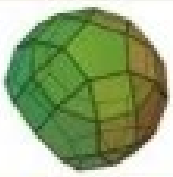
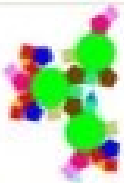
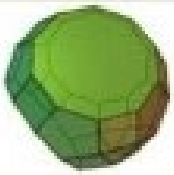
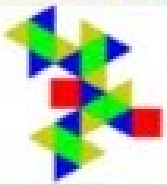
J_n	Nombre	Desarrollo	Imagen	V	E	F	F_3	F_4	F_5	F_6	F_8	F_{10}	Simetría
27	Ortobicúpula triangular *(Cubocta edro girado)*			12	24	14	8	6					D_{3h}
28	Ortobicúpula cuadrada			16	32	18	8	10					D_{4h}
29	Girobicúpula cuadrada			16	32	18	8	10					D_{4d}
30	Ortobicúpula pentagonal			20	40	22	10	10	2				D_{5h}
31	Girobicúpula pentagonal			20	40	22	10	10	2				D_{5d}
32	Ortocupu-larrotonda pentagonal			25	50	27	15	5	7				C_{5v}
33	Girocupu-larrotonda pentagonal			25	50	27	15	5	7				C_{5v}
34	Ortobirrotonda pentagonal *(Icosidodecaedro girado)*			30	60	32	20		12				D_{5h}
35	Ortobicúpula triangular elongada			18	36	20	8	12					D_{3h}
36	Girobicúpula triangular elongada			18	36	20	8	12					D_{3d}

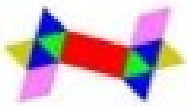
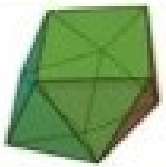
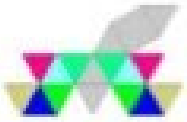
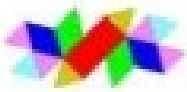
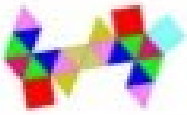
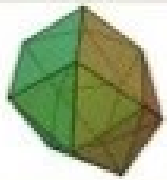
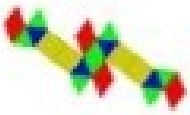
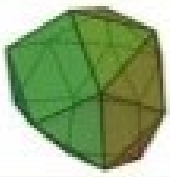
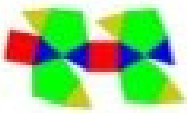
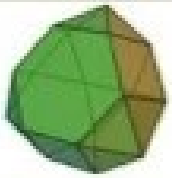
J_n	Nombre	Desarrollo	Imagen	V	E	F	F_3	F_4	F_5	F_6	F_8	F_{10}	Simetría
37	Girobicúpula cuadrada elongada (Romhicuboctaedro girado)			24	48	26	8	18					D_{8d}
38	Ortobicúpula pentagonal elongada			30	60	32	10	20	2				D_{5h}
39	Girobicúpula pentagonal elongada			30	60	32	10	20	2				D_{5d}
40	Ortocupo-larrotonda pentagonal elongada			35	70	37	15	15	7				C_{5v}
41	Girocupu-larrotonda pentagonal elongada			35	70	37	15	15	7				C_{5v}
42	Ortobirrotonda pentagonal elongada			40	80	42	20	10	12				D_{5h}
43	Girobirrotonda pentagonal elongada			40	80	42	20	10	12				D_{5d}
44	Bicúpula triangular giroelongada (2 formas asimétricas)			18	42	26	20	6					D_3
45	Bicúpula cuadrada giroelongada (2 formas asimétricas)			24	56	34	24	10					D_4
46	Bicúpula pentagonal giroelongada (2 formas asimétricas)			30	70	42	30	10	2				D_5

J_a	Nombre	Desarrollo	Imagen	V	E	F	F_3	F_4	F_5	F_6	F_8	F_{10}	Simetría
47	Cupularrotonda pentagonal giroelongada (2 formas asimétricas)			35	80	47	35	5	7				C_5
48	Birrotonda pentagonal giroelongada (2 formas asimétricas)			40	90	52	40		12				D_5
49	Prisma triangular aumentado			7	13	8	6	2					C_{3v}
50	Prisma triangular biaumentado			8	17	11	10	1					C_{3v}
51	Prisma triangular triaumentado			9	21	14	14						D_{3h}
52	Prisma pentagonal aumentado			11	19	10	4	4	2				C_{2v}
53	Prisma pentagonal biaumentado			12	23	13	8	3	2				C_{2v}
54	Prisma hexagonal aumentado			13	22	11	4	5		2			C_{2v}
55	Prisma hexagonal parabiaumentado			14	26	14	8	4		2			D_{2h}
56	Prisma hexagonal metabiaumentado			14	26	14	8	4		2			C_{2v}

J_n	Nombre	Desarrollo	Imagen	V	E	F	F_3	F_4	F_5	F_6	F_8	F_{10}	Simetría
57	Prisma hexagonal triaumentado			15	30	17	12	3		2			D_{3h}
58	Dodecaedro aumentado			21	35	16	5		11				C_{5v}
59	Dodecaedro parahiaumentado			22	40	20	10		10				D_{5d}
60	Dodecaedro metabiaumentado			22	40	20	10		10				C_{2v}
61	Dodecaedro triaumentado			23	45	24	15		9				C_{3v}
62	Icosaedro metabidisminuido			10	20	12	10		2				C_{2v}
63	Icosaedro tridisminuido			9	15	8	5		3				C_{3v}
64	Icosaedro tridisminuido aumentado			10	18	10	7		3				C_{3v}
65	Tetraedro truncado aumentado			15	27	14	8	3		3			C_{3v}
66	Cubo truncado aumentado			28	48	22	12	5			5		C_{4v}

J_n	Nombre	Desarrollo	Imagen	V	E	F	F_3	F_4	F_5	F_8	F_{10}	Simetría
67	Cubo truncado biaumentado			32	60	30	16	10		4		D_{4d}
68	Dodecaedro truncado aumentado			65	105	42	25	5	1		11	C_{5v}
69	Dodecaedro truncado parabiaumentado			70	120	52	30	10	2		10	D_{5d}
70	Dodecaedro truncado metabiaumentado			70	120	52	30	10	2		10	C_{2v}
71	Dodecaedro truncado triaumentado			75	135	62	35	15	3		9	C_{3v}
72	Rombicosido-decaedro giroide			60	120	62	20	30	12			C_{2v}
73	Rombicosido-decaedro parabigiroide			60	120	62	20	30	12			D_{5d}
74	Rombicosido-decaedro metabigiroide			60	120	62	20	30	12			C_{2v}
75	Rombicosido-decaedro trigiroide			60	120	62	20	30	12			C_{3v}
76	Rombicosido-decaedro disminuido			55	105	52	15	25	11		1	C_{5v}

J_n	Nombre	Desarrollo	Imagen	V	E	F	F_3	F_4	F_5	F_6	F_8	F_{10}	Simetría
77	Rombicosido-decaedro paragiroide disminuido			55	105	52	15	25	11			1	C_{2v}
78	Rombicosido-decaedro metagiroide disminuido			55	105	52	15	25	11			1	C_s
79	Rombicosido-decaedro bigiroide disminuido			55	105	52	15	25	11			1	C_s
80	Rombicosido-decaedro parabidisminuido			50	90	42	10	20	10			2	D_{5d}
81	Rombicosido-decaedro metabidisminuido			50	90	42	10	20	10			2	C_{2v}
82	Rombicosido-decaedro giroide bidisminuido			50	90	42	10	20	10			2	C_s
83	Rombicosido-decaedro tridisminuido			45	75	32	5	15	9			3	C_{3v}
84	Biesfenoide romo *(Dodecaedro siamés)*			8	18	12	12						D_{2d}
85	Antiprisma cuadrado romo			16	40	26	24	2					D_{4d}

J_n	Nombre	Desarrollo	Imagen	V	E	F	F_3	F_4	F_5	F_6	F_8	F_{10}	Simetría
86	Esfenocorona			10	22	14	12	2					C_{2v}
87	Esfenocorona aumentada			11	26	17	16	1					C_s
88	Esfeno-megacorona			12	28	18	16	2					C_{2v}
89	Hebesfeno-megacorona			14	33	21	18	3					C_{2v}
90	Biesfenocíngulo			16	38	24	20	4					D_{3d}
91	Bilunabirrotonda			14	26	14	8	2	4				D_{2h}
92	Hebesfenorrotonda triangular			18	36	20	13	3	3	1			C_{3v}

Poliedro Dual: Conjugación

Si se traza un poliedro empleando como vértices los centros de las caras de un sólido platónico se obtiene otro sólido platónico, llamado conjugado del primero, con tantos vértices como caras tenía el sólido inicial. El poliedro conjugado de un dodecaedro es un icosaedro, y viceversa; el de un cubo es un octaedro; y poliedro conjugado de un tetraedro es otro tetraedro. También pueden conjugarse otros poliedros no platónicos.

Ecuación intrínseca de Euler

El teorema de poliedros de Euler expresa una cualidad topológica de los poliedros convexos, al margen de sus medidas y formas, y de modo especial de los poliedros

regulares. Enuncia que el número de caras de un poliedro convexo más el número de sus vértices es igual al número de sus aristas más dos, mediante la siguiente ecuación:

$$c + v = a + 2$$

Conjugación

El tetraedro regular es el único sólido platónico conjugado de sí mismo (se suele denominar auto-conjugado), ya que el poliedro conjugado de un tetraedro de arista **a** es otro tetraedro de arista **b**, tal que:

$$b = \frac{a}{4}$$

Composición, descomposición y maclado

Es posible incluir un tetraedro regular en un cubo de tal forma que cada uno de los vértices del tetraedro coincida con un vértice del cubo, coincidiendo las aristas del tetraedro con diagonales de las caras del cubo. El volumen del cubo necesario para incluir un tetraedro en la forma descrita es el triple que el del tetraedro. Hay dos posiciones posibles para incluir los tetraedros en el cubo en esta forma;

- Las aristas de los tetraedros colocados en ambas posiciones son perpendiculares entre sí (son las diagonales cruzadas de las caras del cubo).
- Las tres secciones cuadradas de ambos tetraedros coinciden.
- El sólido conjunto (o macla) de ambas es un poliedro compuesto denominado estrella octángula de Kepler (*stella octangula*).
- El sólido común de ambos es un octaedro regular de arista mitad que la de los tetraedros.

De las infinitas formas de truncar un tetraedro regular, hay dos que producen resultados singulares:

- Truncando el tetraedro con planos que pasen por el punto medio de sus aristas, obtenemos un octaedro regular.
- Truncando el tetraedro con planos que pasen por la tercera parte de sus aristas, obtenemos un sólido arquimediano que toma el nombre genérico de tetraedro truncado.

Prismas y Pirámides

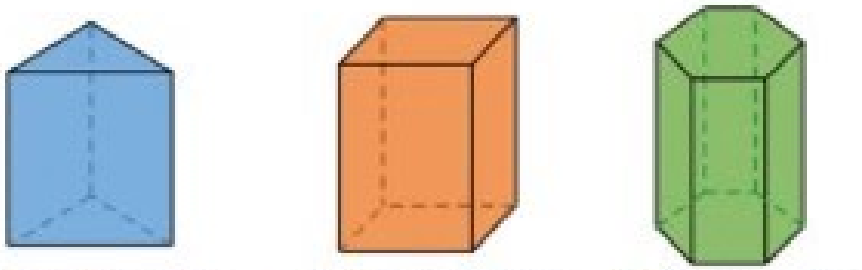
Los prismas y pirámides son cuerpos geométricos cuyas caras son poligonales.

Los prismas tienen dos caras paralelas e iguales, llamadas bases, el resto de sus caras son paralelogramos. Las pirámides tienen una base y el resto de las caras son triángulos.

El prisma

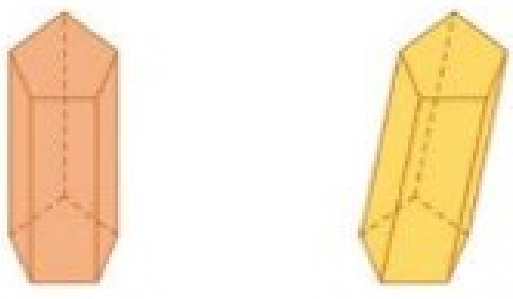
Los prismas son poliedros que tienen:

Está constituido por dos bases poligonales paralelas e iguales y sus caras laterales son paralelogramos. Según el número de lados de la base se le da el nombre al prisma. Por ejemplo: prisma triangular (sus bases son un triángulo), prisma cuadrado (sus bases son cuadrados), prisma pentagonal (sus bases son pentágonos), prisma hexagonal (sus bases son hexágonos), etc.



La altura de un prisma es la distancia entre las bases.

El prisma es recto cuando su eje es perpendicular a las bases, y oblicuo cuando el ángulo entre el eje y la base es diferente a base 90°. Si el prisma es cortado de tal manera que la sección producida no sea paralela a una de sus bases, recibe el nombre de prisma truncado.



Las mejores arquitectas de la naturaleza

¿Por qué las abejas hacen sus panales hexagonales?

Las abejas pueden ser extremadamente inteligentes, pueden aprender observando a otros. Son brillantes matemáticas.

Las abejas desempeñan una danza que utiliza la velocidad y direccionalidad para comunicar la ubicación de los recursos en relación con su posición actual y el Sol.

Durante toda su historia evolutiva han dominado el arte de almacenar la mayor cantidad de miel mediante el uso de la menor cantidad de recursos. El secreto de eficiencia detrás de este nido de abeja se debe a su forma hexagonal.

La creación de la cera es un proceso bastante caro para la abeja, ya que consumen ocho onzas de miel por cada onza de cera que crean. Por esta razón, se deben asegurar de que no están perdiendo recursos al crear las estructuras que albergarán el néctar y la miel. El secreto está en la geometría de las estructuras.

La cera es el material que las abejas usan para construir sus nidos. Es producida por las abejas melíferas jóvenes que la segregan como líquido a través de sus glándulas cereras. Al contacto con el aire, la cera se endurece. Las abejas la usan para construir los alvéolos hexagonales de sus panales, ya estructurados rígida y eficientemente. Usan estos alvéolos para conservar la miel y el polen; la reina deposita en ellas sus huevos y las nuevas abejas se crían en su interior. La cera es producida por todas las especies de abejas melíferas, aunque las ceras producidas por diferentes especies de abejas tienen propiedades químicas y físicas levemente diferentes.

Un matemático griego llamado Pappus de Alejandría fue el primero en preguntarse por qué las abejas guardan la miel en hexágonos cuando sería más sencillo construir cuadrados o triángulos. Él se dio cuenta de que, construyendo hexágonos, las abejas utilizan el mismo perímetro que con triángulos o cuadrados pero el área que encierra el hexágono es mayor. Los hexágonos pueden almacenar un 30% más de miel que los cuadrados o las formas más simples.

La pirámide

Es una figura tridimensional constituida por una base poligonal y por caras laterales cuyas aristas concurren a un punto del espacio llamado cúspide o vértice, por lo tanto, las caras laterales siempre serán triangulares. El eje de la pirámide es la línea que va del vértice al centro de la base. La altura de la pirámide es la perpendicular que va del vértice al plano de la base.

Si coinciden la pirámide es recta. Si no coinciden la pirámide es oblicua.

La apotema lateral de una pirámide regular es la altura de cualquiera de sus caras laterales.

Pirámides de Giza

Las únicas supervivientes de las Siete Maravillas del Mundo son las pirámides de Giza, con más de 4.000 años. Su forma extraordinaria, la geometría y la edad las hacen una construcción exótica, que parece surgir del desierto y plantea la pregunta de siempre: ¿Cómo fueron construidas y por qué?

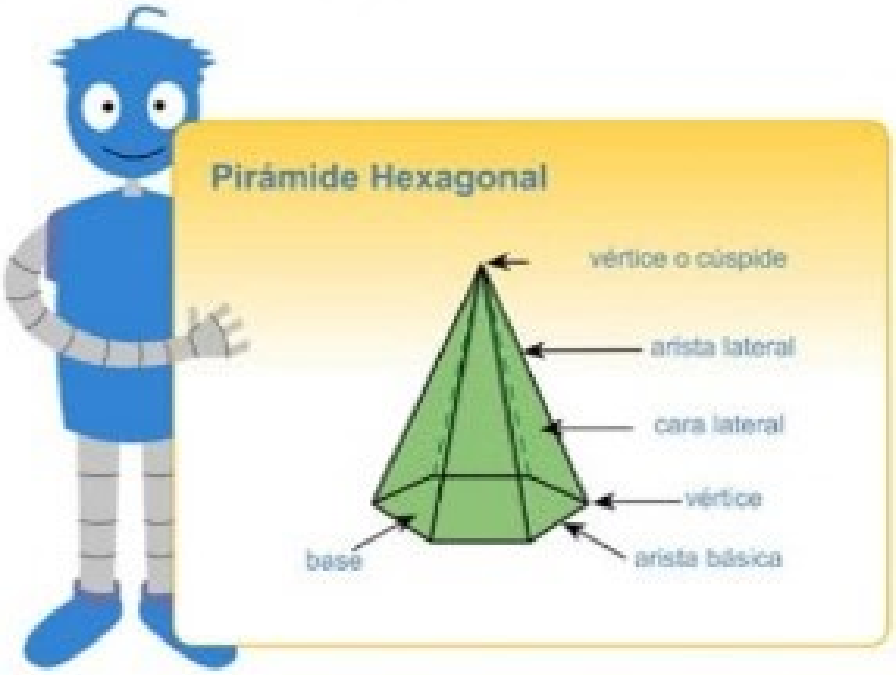
La pirámide más antigua y grande es la de Keops.

La construcción

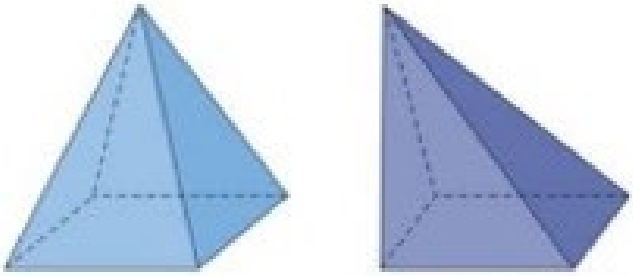
Las pirámides muestran, para su época, el gran conocimiento de los técnicos egipcios y la capacidad organizativa necesaria para construir tales monumentos con medios muy simples; pero nada parece indicar que hiciera falta una tecnología superior a la que disponían los egipcios representada por "ingenios" de madera, trineos, hipotéticamente usando la rueda, en forma de rodillos de madera y rampas.

No se sabe con certeza cómo se construyeron las pirámides, pues no han perdurado documentos de su época que lo describan. Además, se utilizaron diversos materiales (piedra escuadrada, piedra sin tallar, adobe) y variadas técnicas en la construcción de sus núcleos (apilamiento de bloques, muros resistentes conformando espacios rellenos de cascotes, etc.).

La hipótesis más aceptada es la siguiente: previamente se procedía a aplanar el terreno rocoso, y excavar canales para inundarlos de agua y así poder marcar líneas de nivel con las que se preparaba una superficie horizontal. Después se rellenaban los surcos. A continuación, se excavaba la cámara subterránea y se comenzaba la edificación. La mayoría de los bloques de piedra eran cortados en canteras próximas al lugar de construcción. Se transportaban otros de las canteras del sur del país con ayuda de gigantescas barcazas. Los bloques se colocaban a continuación sobre trineos y se arrastraban hasta su emplazamiento definitivo.



La pirámide se llama rectangular cuando el eje es perpendicular al centro de la base, en un caso diferente se llama oblicua. La porción de pirámide comprendida entre la base y la sección producida por un plano que corta sus caras laterales se llama tronco de la pirámide o pirámide truncada.



Tipos de pirámides

En las pirámides, las caras laterales son siempre triángulos. Por tanto, para distinguirlas y nombrarlas se utiliza el polígono de la base.

Pirámide triangular
Base: 3 lados

Pirámide cuadrangular
Base: 4 lados

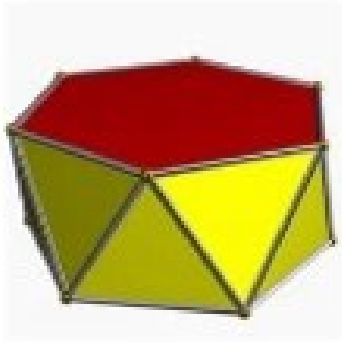
Pirámide pentagonal
Base: 5 lados

Pirámide hexagonal
Base: 6 lados

Antiprisma

Un antiprisma es un poliedro que se caracteriza por tener dos caras iguales paralelas (bases), pero a diferencia del prisma, están giradas y reunidas por medio de triángulos.

Las caras laterales son triángulos que unen dos vértices consecutivos de una base con el vértice correspondiente de la otra. En un antiprisma recto, las caras laterales son triángulos isósceles iguales. Si los triángulos son equiláteros, el antiprisma es uniforme; en este caso se dice que el antiprisma es un poliedro semirregular. Forman una serie infinita y fueron descubiertos por Johannes Kepler.



Antiprisma hexagonal

En el caso de los antiprismas de directrices regulares, las dos caras directrices son polígonos regulares y todos los triángulos circundantes son equiláteros, lo que hace que el cuerpo sea de aristas regulares (todas iguales). En general, las caras paralelas de un antiprisma de directrices regulares están rotadas la una de la otra en un ángulo β.

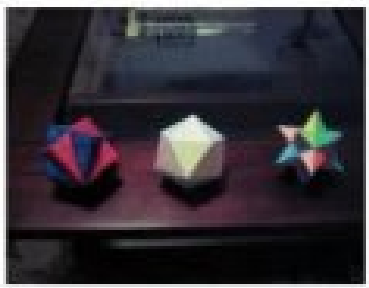
$$\beta = 360^{o} / 2n$$

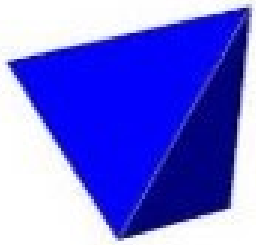
donde n es el número de lados del polígono regular

Poliedro

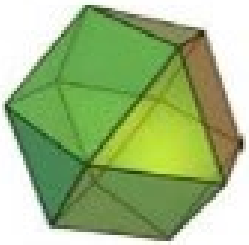
Modelos de poliedros. De izquierda a derecha: un poliedro compuesto de dos cubos, un icosaedro regular, un pequeño dodecaedro estrellado.

Un poliedro es, en el sentido dado por la geometría clásica al término, un cuerpo geométrico cuyas caras son planas y encierran un volumen finito. Los poliedros se conciben como cuerpos tridimensionales.

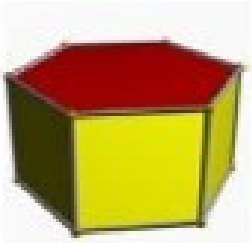




Tetraedro de los sólidos platónicos.

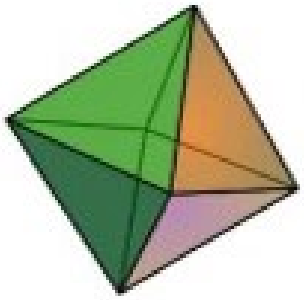


Cuboctaedro de los sólidos de Arquímedes.

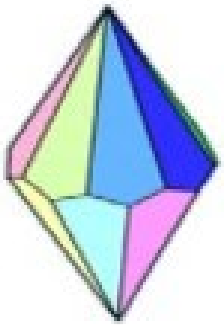


Prisma hexagonal

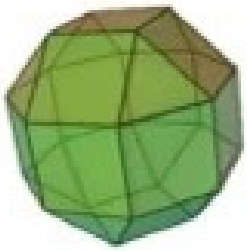
Hexaquisoctaedro de la familia de los sólidos de Catalan.



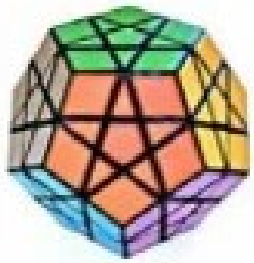
El octaedro es una bipirámide de base cuadrada.



Trapezoedro octogonal

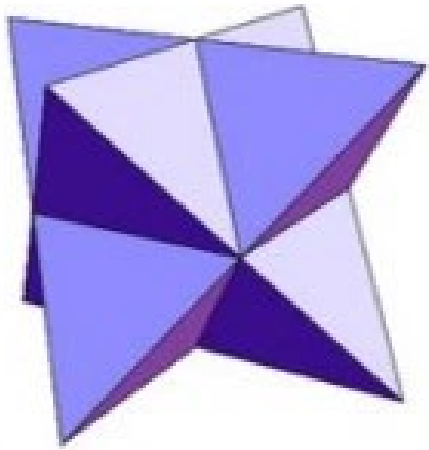


La girobicúpula cuadrada elongada (J_{37}), un sólido de Johnson.



El dodecaedro de Platón

La estrella octángula de Kepler



La estrella octángula de Kepler, o *stella octangula* en latín, como el mismo Kepler lo denominó, es un poliedro formado por la composición en macla de dos tetraedros regulares incluidos en un cubo, de tal forma que cada uno de los vértices de los tetraedros coincida con uno de los vértices del cubo, y las aristas de los tetraedros con las diagonales de las caras del cubo.

Este ejemplo de estrella octángula no es un sólido de Johnson porque no es convexo.

En geometría, un sólido de Johnson es un poliedro estrictamente convexo, siendo cada una de sus caras un polígono regular. Por otra parte, no es un sólido platónico, ni un sólido de Arquímedes, ni un prisma ni un antiprisma.

En un sólido convexo estricto al menos tres caras concurren a un vértice y el total de sus ángulos es menor a 360°. Dado que un polígono regular tiene ángulos de al menos 60°, a lo sumo pueden concurrir cinco caras en cada vértice. La pirámide de base pentagonal (J_2) es un ejemplo de grado 5 (máximo).

Aunque no existen restricciones respecto a que un determinado polígono forme una cara de un sólido de Johnson, los polígonos aplicables siempre tienen 3, 4, 5, 6, 8 o 10 lados.

Poliedro de Szilassi

El poliedro de Szilassi es un poliedro no convexo, topológicamente un toro, con siete caras hexagonales.

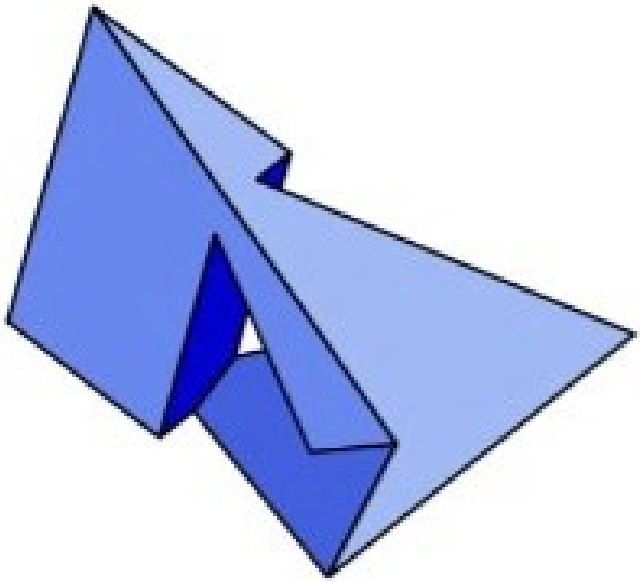
Cada cara de este poliedro comparte un vértice con cada una de las otras caras. Como resultado, se requieren siete colores para pintar cada cara adyacente, proveyendo el límite inferior para el teorema de los siete colores (generalización del teorema de los cuatro colores). Tiene un eje de simetría rotacional de 180 grados; 3 pares de caras son congruentes, dejando un hexágono impar que tiene la misma simetría rotacional

que el poliedro. Los 14 vértices y 21 aristas del poliedro de Szilassi forman un grafo de Heawood sobre la superficie de un toro.

El tetraedro y el poliedro de Szilassi son los únicos dos poliedros conocidos en los que cada cara comparte una arista con cada una de las otras caras.

El poliedro de Szilassi lleva su nombre debido al matemático Húngaro Lajos Szilassi, que lo descubrió en 1977. El poliedro dual del poliedro de Szilassi, el Poliedro de Császár, fue descubierto antes por Ákos Császár; tiene siete vértices, conectando cada par de vértices, y 14 caras triangulares. Al igual que el poliedro de Szilassi, el poliedro de Császár topológicamente es un toro.

Poliedro de Szilassi	
Tipo	Poliedro toroidal
Caras	7 Hexágonos
Aristas	21
Vértices	14
Característica de Euler	0
Género	1
Configuración de vértices	6.6.6
Grupo de simetría	?
Poliedro dual	Poliedro de Császár
Propiedades	No convexo



Poliedro de Császár

En geometría, el poliedro de Császár es un poliedro no convexo, topológicamente un toro, con 14 caras triangulares.

Este poliedro no tiene diagonales; cada par de vértices está conectado por una arista. Tiene 7 vértices y 21 aristas.

El tetraedro y el poliedro de Császár son los únicos poliedros conocidos que no tienen diagonales, aunque hay otros poliedros conocidos, tales como el poliedro de Schönhardt, que no tienen diagonales interiores (es decir, todas las diagonales están en el exterior del poliedro), como las superficies de una sola cara sin diagonales. Si un poliedro con v vértices es proyectado sobre una superficie con h agujeros, de alguna manera cada par de vértices se conecta por una arista, y se deduce de su característica de Euler.

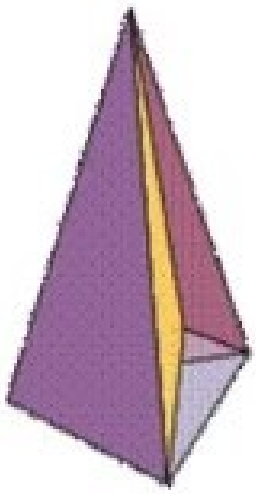
$$h = ((v-3).(v-4))/12$$

Esta ecuación se satisface para el tetraedro con $h = 0$ y $v = 4$, y para el poliedro de Császar con $h = 1$ y $v = 7$. La próxima posible solución, $h = 6$ y $v = 12$, correspondería a un poliedro con 44 caras y 66 aristas, pero no es realizable como un poliedro; no se conoce

si tal poliedro existe con un género mayor. De manera general, esta ecuación se puede satisfacer sólo cuando v es congruente con 0, 3, 4, ó 7 módulo 12.

El poliedro de Császár recibe su nombre por el topólogo Ákos Császár, quien lo descubrió en 1949. Su poliedro dual es el poliedro de Szilassi, que fue descubierto más tarde, en 1977, por Lajos Szilassi. El poliedro de Császár es topológicamente equivalente a un toro.

Tipo	Poliedro toroidal
Caras	14 triángulos
Aristas	21
Vértices	7
Característica de Euler	0
Género	1
Configuración de vértices	3.3.3.3.3.3
Grupo de simetría	C_2
Dual	Poliedro de Szilassi
Propiedades	No convexo

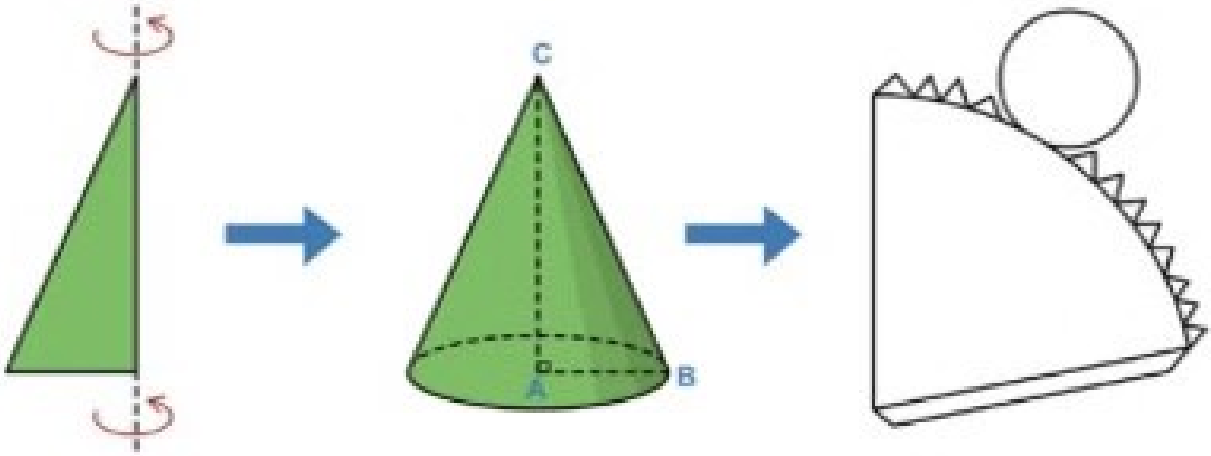


Cuerpos redondos

Son la esfera, el cono y el cilindro. Los cuerpos redondos son aquellos que tienen, al menos, una de sus caras o superficies de forma curva. También se denominan cuerpos de revolución. Pueden obtenerse a partir de una figura que gira alrededor de un eje.

Cono

El cono es un cuerpo geométrico generado por un triángulo rectángulo al girar en torno a uno de sus catetos.



Elementos del cono

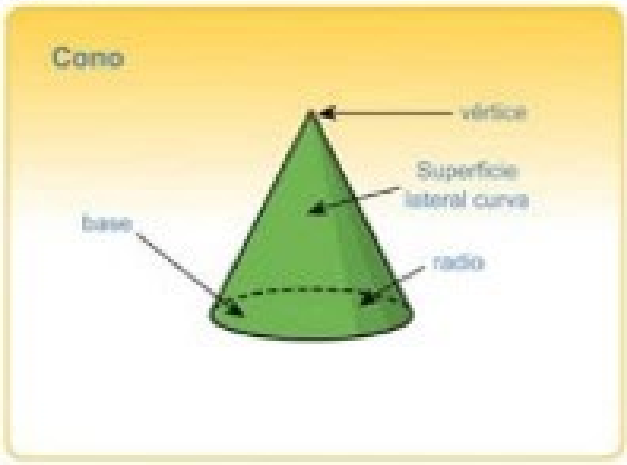
En la imagen superior podemos distinguir los elementos de un cono recto:

-**Eje:** es el cateto AC. Alrededor de él gira el triángulo rectángulo.

-**Base:** es el círculo que genera la rotación del otro cateto, AB. Por lo tanto, AB es el radio del cono. La base se simboliza: O (A, AB).

-**Generatriz:** es la hipotenusa del triángulo rectángulo, BC, que genera la región lateral conocida como manto del cono.

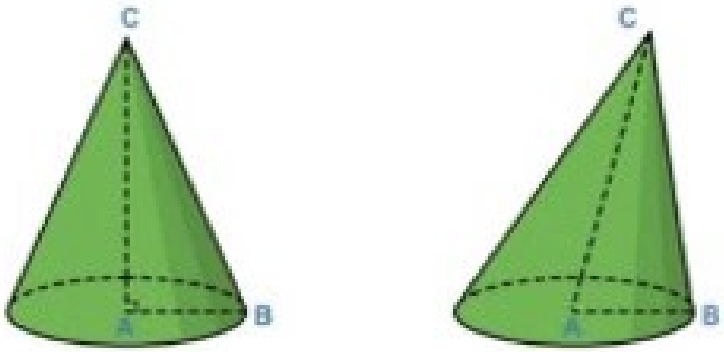
-**Altura:** corresponde al eje del cono, porque une el centro del círculo con la cúspide siendo perpendicular a la base.



El cono tiene una cara basal plana y una cara lateral curva. Posee una arista lateral y un vértice llamado cúspide.

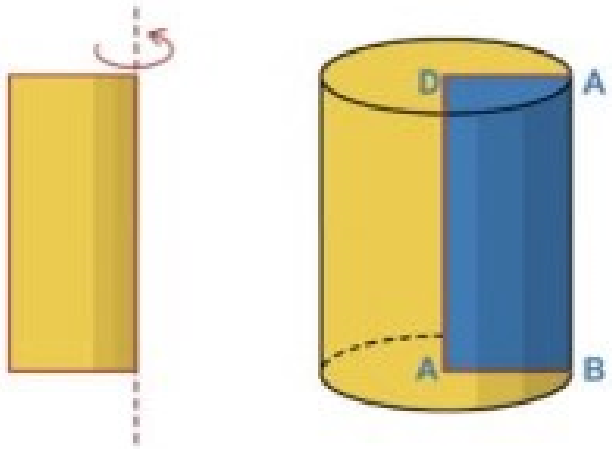
Tipos

Si la altura coincide con su eje, el cono es recto. Si el eje y la altura no coinciden, el cono es oblicuo.



Cilindro

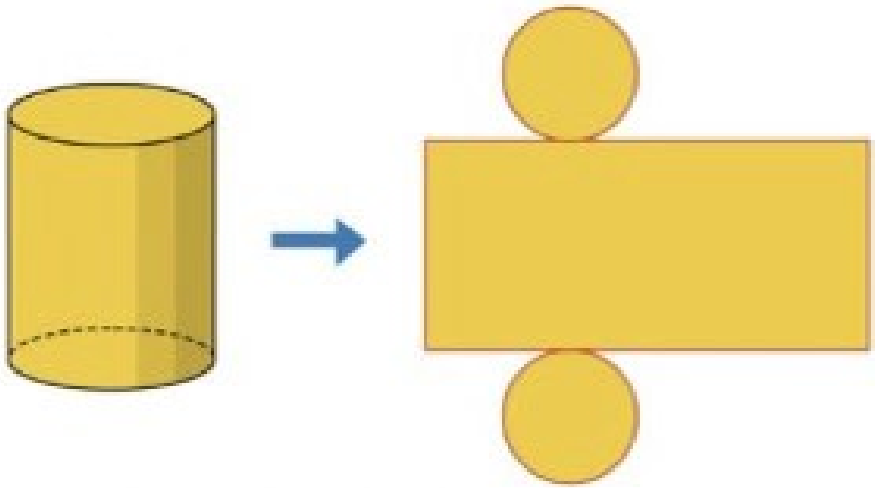
El cilindro es el cuerpo geométrico generado por un rectángulo al girar en torno a uno de sus lados.



Elementos del cilindro

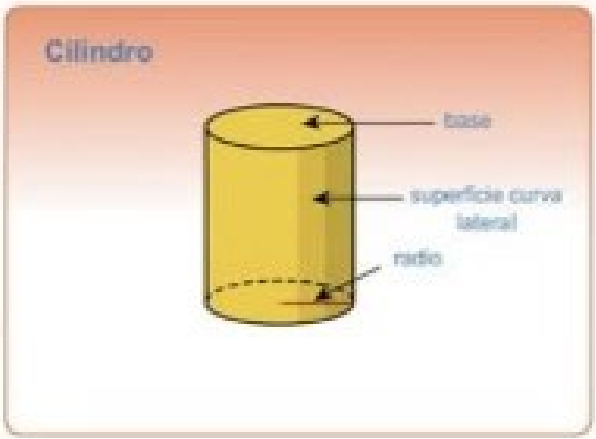
Es posible determinar los elementos de un cilindro, que son:

- **Eje:** lado AD, alrededor del cual gira el rectángulo.
- **Bases:** son los círculos paralelos y congruentes que se generan al girar los lados AB y CD del rectángulo. Cada uno de estos lados es el radio de su círculo y también, el radio del cilindro.
- **Altura:** corresponde al mismo eje AD; es perpendicular a las bases y llega al centro de ellas. Esta es la razón por la que el cilindro es recto.
- **Generatriz:** es el lado BC, congruente con el lado AD, y que al girar forma la cara lateral o manto del cilindro.



El cilindro tiene 2 caras basales planas, paralelas y congruentes. 1 cara lateral que es curva y 2 aristas basales.

Podemos observar que en el desarrollo en el plano se nos forma un rectángulo para la cara lateral, cuyos lados son el perímetro de la circunferencia que forma las bases y la altura o generatriz.



El cilindro en la arquitectura

Estadio Presidente Perón: El cilindro fue la fuente de inspiración del diseño y proyecto. El Estadio Presidente Perón,

conocido popularmente como El Cilindro, es un estadio de fútbol ubicado en la ciudad de Avellaneda, Argentina. El 27 de marzo de 1944 se inició su proyecto de construcción y fue inaugurado el 3 de septiembre de 1950.

Fue diseñado por ingenieros alemanes, algunos de ellos con experiencia en la obra de reconstrucción de ciudades destruidas durante la Segunda Guerra Mundial.

La capacidad original era de 120.000 personas. Debido a las distintas remodelaciones llevadas a cabo, fue reducida a 64.000.

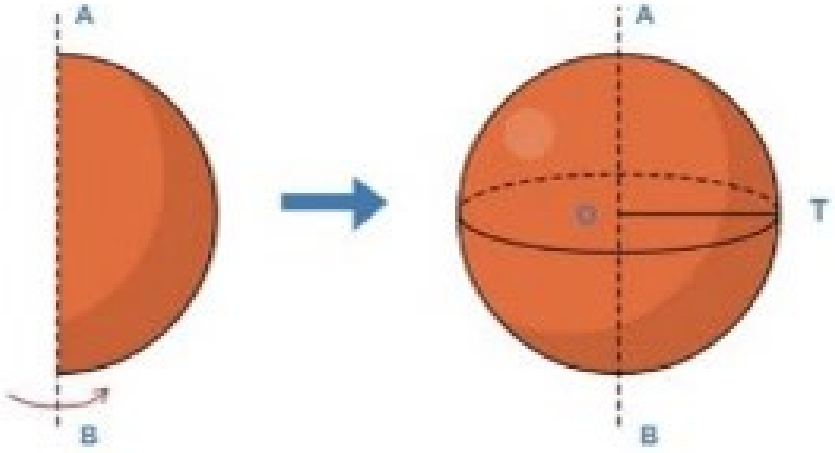
Características: Las dimensiones del campo de juego son de 105 x 70 metros, haciendo de este uno de los de mayor superficie en el país.

Posee un obelisco en uno de sus costados, en cuya cima hay un mástil con una bandera de la institución, así como también un lugar para colocar una cámara de televisión y transmitir partidos en vivo.

En su anillo inferior lo rodea una fosa con agua que separa las tribunas del campo de juego. Dicha característica permitió que en 2004 se retiraran los alambrados de las tribunas cabeceras, los cuales fueron posteriormente restituidos.

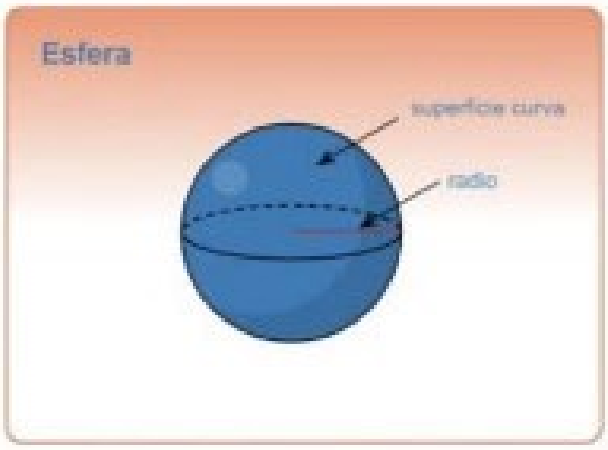
Esfera

La esfera es el sólido generado al girar una semicircunferencia alrededor de su diámetro.



Elementos de la esfera

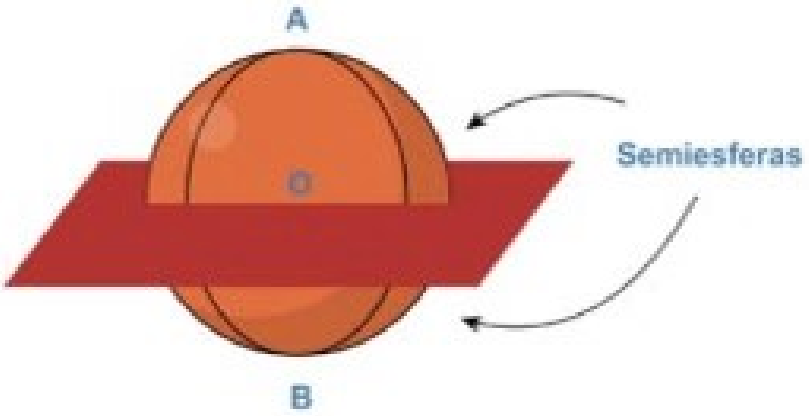
Al girar el semicírculo alrededor del diámetro AB, se genera una superficie esférica donde se determinan los siguientes elementos:



- **Generatriz:** es la semicircunferencia que genera la superficie esférica.
- **Centro de la esfera:** es el centro de la semicircunferencia y corresponde al punto O.
- **Radio de la esfera:** es el radio de la semicircunferencia: OA.
- **Diámetro de la esfera:** es el segmento que une 2 puntos opuestos de la superficie esférica, pasando por el centro: AB.

La esfera tiene una sola cara curva.

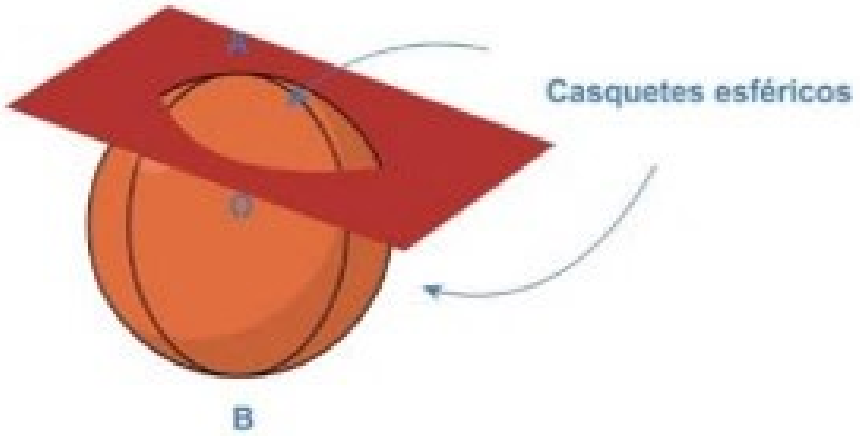
Todos los puntos que forman la superficie esférica equidistan de uno fijo llamado centro, y que corresponde al centro de la semicircunferencia que gira.



Cortes

Una esfera puede ser cortada por un plano que pasa por su centro. De esta forma se obtienen 2 semiesferas y el plano deja como borde un círculo máximo.

Si el plano corta a la esfera sin pasar por su centro se obtienen 2 casquetes esféricos.



La esfera en la arquitectura

La firma coreana Heerim Architects ha diseñado dos complejos hoteleros que se construirán en Azerbaiyán, concretamente en su capital, Bakú. En uno de los complejos se situará el Hotel Full Moon Bay, mientras que el otro estará formado por los hoteles 'Caspian Plus' y 'Crescent Place'. Cada uno de ellos se situará en un extremo de una bahía mirando al Mar Caspio.

Sus diseños pretenden ser espectaculares, sobre todo el del 'Full Moon'. Su estructura en forma de disco (esfera truncada) tiene un agujero en la parte superior que recuerda a la Luna en sus distintas fases al mirarlo desde diferentes ángulos. También, dependiendo del lugar desde donde se mire, su fachada, que será construida con espejos que tendrán un tratamiento especial, se verá con diferentes colores.

Tendrá 382 habitaciones repartidas entre sus 35 plantas y contará con una superficie de 104.182 metros cuadrados y 158,68 metros de altura. El Full

Moon estará conectado con dos torres de apartamentos, llamadas Palace of Wind (Palacio del Viento), por un edificio con formas serpenteadas que visualmente actuará como una peana sobre la que se sitúa el conjunto.

Por otro lado, el Hotel Crescent tiene un diseño en forma de luna creciente situada con sus puntas hacia abajo, formando un gran arco. Contará con 32 plantas, que albergarán un lujoso hotel con 221 habitaciones y 128 apartamentos, repartidos por sus 128.140 metros cuadrados. Detrás del hotel, se situarán otros cuatro edificios; tres de ellos serán para uso residencial y el otro, el más alto, con 203 metros, tendrá 43 plantas dedicadas a oficinas.

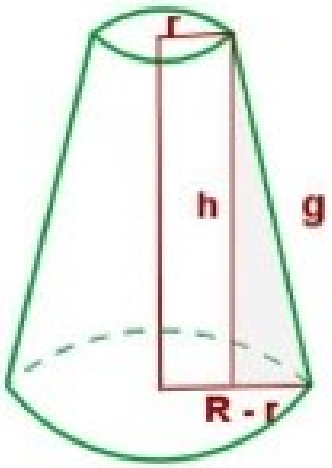
Tronco de cono

Definición:

El tronco de cono o cono truncado es el cuerpo geométrico que resulta al cortar un cono por un plano paralelo a la base y separar la parte que contiene al vértice.

Elementos del tronco de cono

La sección determinada por el corte es la base menor.



La altura es el segmento que une perpendicularmente las dos bases. Los radios son los radios de sus bases.

La generatriz es el segmento que une dos puntos del borde de las dos bases.

Obtenemos la generatriz del tronco de cono aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo sombreado:

$$g^2 = h^2 + (R - r)^2$$

$$g = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$$

Área lateral de un tronco de cono

$$A_L = \pi \cdot (R + r) \cdot g$$

Área de un tronco de cono

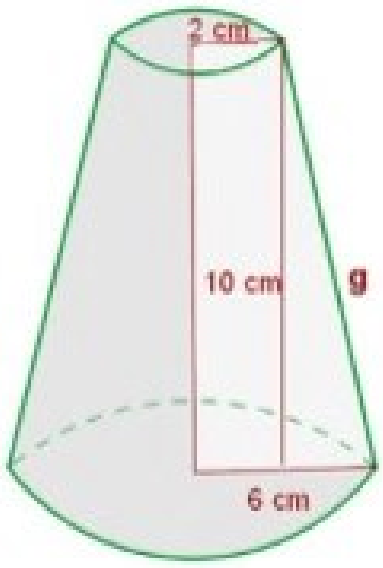
$$A_T = \pi \left[g (R + r) + R^2 + r^2 \right]$$

Volumen de un tronco de cono

$$A = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h (R^2 + r^2 + R \cdot r)$$

Ejercicios de troncos de cono

Calcular el área lateral, el área total y el volumen del tronco de cono de radios 6 y 2 cm y de altura 10 cm.



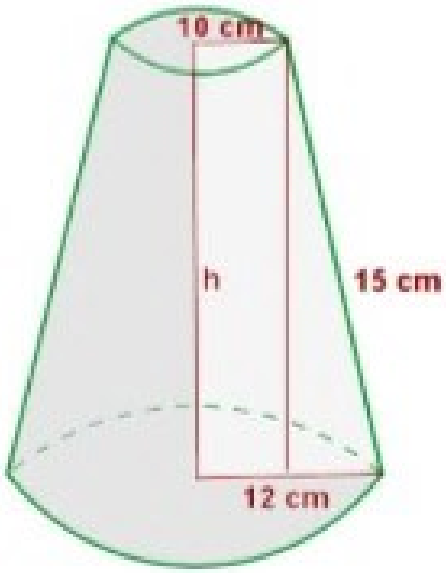
$$g = \sqrt{10^2 + (6 - 2)^2} = 10.77 \text{ cm}$$

$$A_L = \pi \cdot (6 + 2) \cdot 9.165 = 270.69 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 270.69 + \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 2^2 = 396.35 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 10 \cdot (6^2 + 2^2 + \sqrt{6^2 \cdot 2^2}) = 544.54 \text{ cm}^3$$

Calcular el área lateral, el área total y el volumen del tronco de cono de radios 12 y 10 cm, y de generatriz 15 cm.



$$A_L = \pi \cdot (12 + 10) \cdot 15 = 1036.73\ cm^2$$

$$A_T = 1036.72 + \pi \cdot 12^2 + \pi \cdot 10^2 = 1803.27\ cm^2$$

$$15^2 = h^2 + (12 - 10)^2$$

$$h = \sqrt{15^2 - 2^2} = 14.866\ cm$$

$$V = \frac{1}{3}\ \pi \cdot 14.866 \cdot (12 + 10 + \sqrt{12 \cdot 10}) = 5666.65\ cm$$

Torre Moya

Referencia: Torre de diseño tronco-cónico con truncamiento vertical inclinado.
Comunidad: Andalucía
Provincia: Málaga
Municipio: Vélez-Málaga
Localidad: Benajarafe
Tipología: Atalaya, torre vigía, puesto de vigilancia
Fue construida en el siglo XVIII.

Situación

La Torre Moya se alza en una loma de unos 15 m sobre el nivel del mar e inmediata a la carretera N-340, en las proximidades de la localidad costera de Benajarafe, en el municipio de Vélez-Málaga, provincia de Málaga.

Descripción

Se trata de una típica torre de pezuña, con base semicircular prolongada en dos brazos rectos y frente formado por dos espigones sobresalientes.

Protección

Bajo la protección de la Declaración genérica del Decreto de 22 de abril de 1949, y la Ley 16/1985 sobre el Patrimonio Histórico Español. Esta torre vigía conocida también como Torre Gorda fue construida en el siglo XVIII.

Fórmulas de área y volumen de cuerpos geométricos

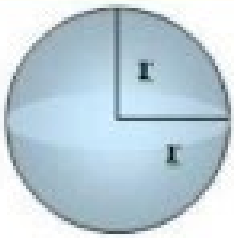
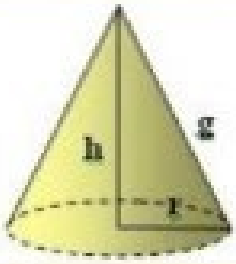
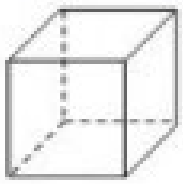
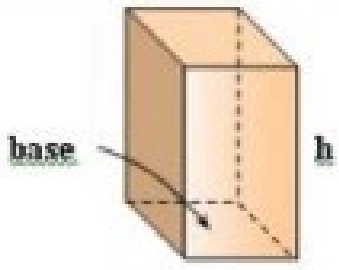
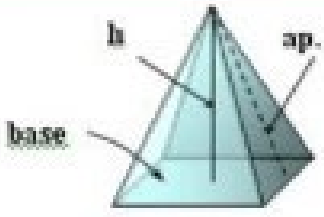
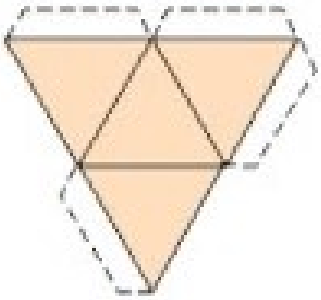
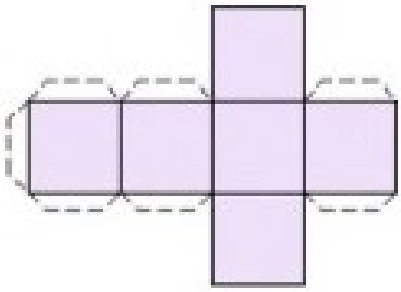
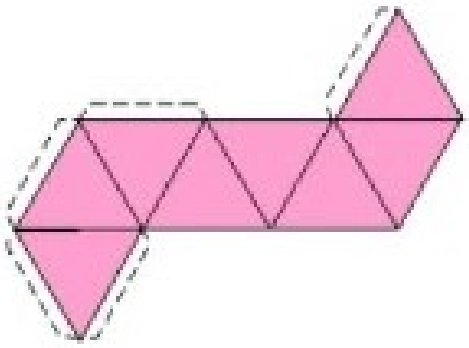
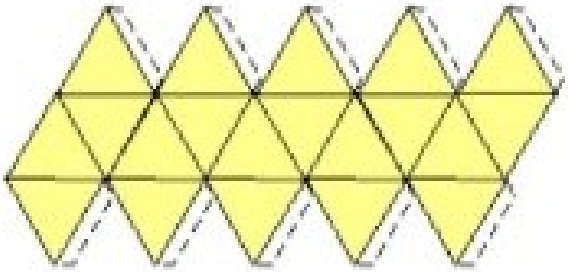
Figura	Esquema	Área	Volumen
Cilindro		$A_{total} = 2\pi r(h + r)$	$V = \pi r^2 \cdot h$
Esfera		$A_{total} = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Cono		$A_{total} = \pi r^2 + \pi r g$	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
Cubo		$A = 6a^2$	$V = a^3$
Prisma		A = (perim. base • h) + 2 • área base	V = área base x h
Pirámide		$A = \frac{\text{perim base} \times \text{ap lat}}{2} + \text{area base}$	$V = \frac{\text{area base} \times h}{3}$

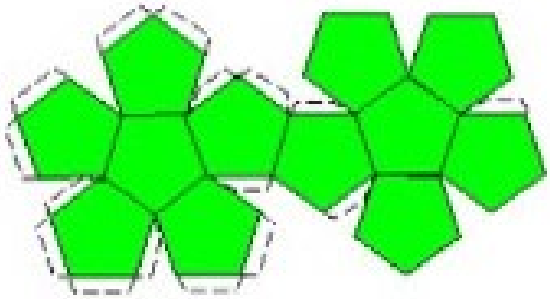
Diagrama y construcción de poliedros
Desarrollo de los platónicos y otros poliedros

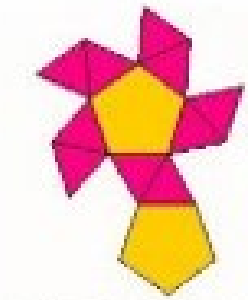




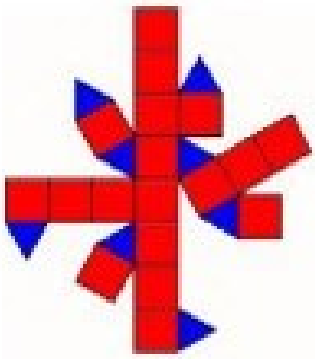




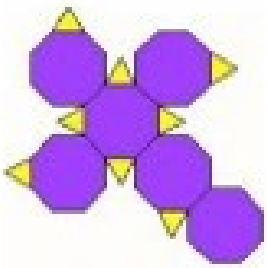




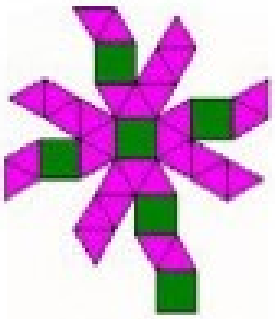
Antiprisma Pentagonal



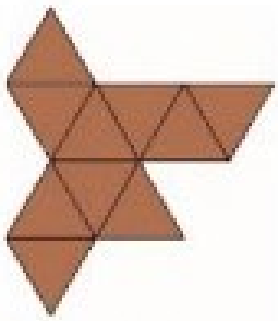
Rombicuboctaedro



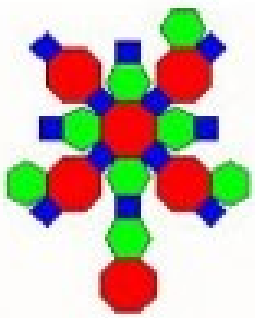
Cubo truncado



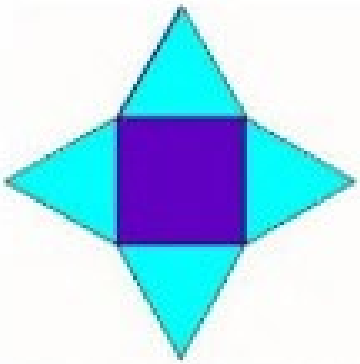
Cubo chato



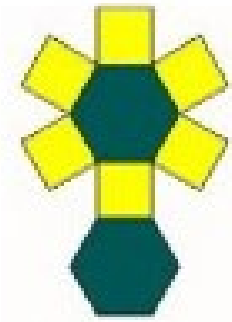
Deltaedro-10



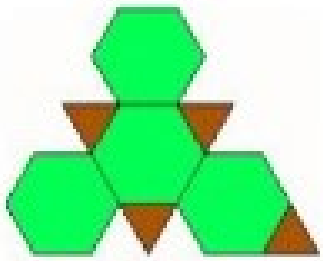
Gran rombicuboctaedro



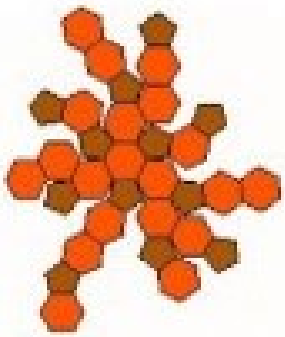
Pirámide de base cuadrada



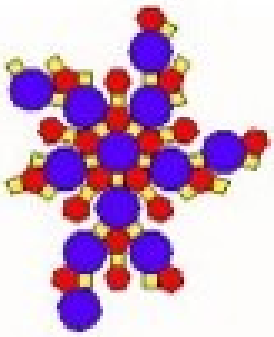
Prisma hexagonal



Tetraedro truncado

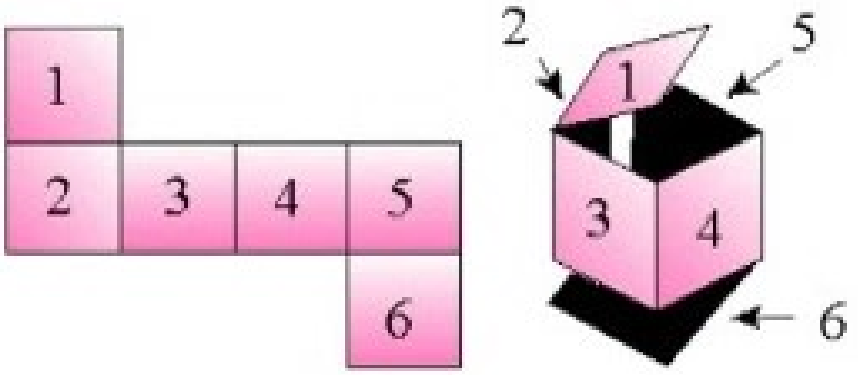


Icosaedro truncado



Gran rombicosidodecaedro

Este es un desarrollo del cubo. Observa su construcción.



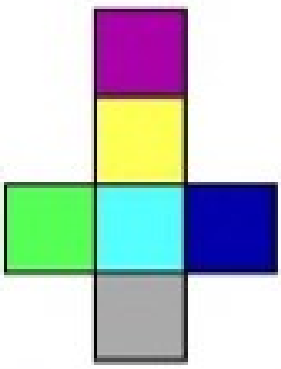
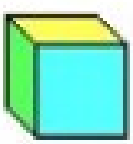


Diagrama de un cubo



El diagrama de un poliedro consiste en el despliegue de todos sus planos, unidos por un lado común, sobre un plano único.

Ese despliegue tendrá dos utilidades principales; una que permitirá un diseño con el cual construir los poliedros en materiales apropiados (como cartulina, chapa metálica o madera laminar), y otra que conducirá al modo de calcular la superficie lateral. Partiendo de un desarrollo del poliedro, es más sencillo construirlos. En los Cuerpos redondos sólo es posible el Diagrama del Cono y del Cilindro y sus derivados.

Geometría sagrada

La geometría sagrada es el conjunto de conocimientos, hipótesis y tradiciones usadas en la planificación y construcción de estructuras religiosas:

1.- Catedrales: Una catedral es un templo cristiano, donde tiene sede o cátedra el obispo, siendo así la iglesia principal de cada diócesis o Iglesia particular.

2.- Templos: El término templo (del latín *templum*) designa un edificio sagrado. En su origen designaba la zona del cielo que el augur (sacerdote de la Antigua Roma) utilizaba para contemplar qué aves la atravesaban y en qué sentido, estableciendo así los augurios. Muchas religiones, si no todas, tienen edificios que se consideran sagrados.

3.- Mezquitas: Lugar de culto para los seguidores de la fe islámica.

La Badshahi Masjid en Lahore, Pakistán con un iwán en el centro, tres cúpulas y cinco minaretes visibles.

4.- Monumentos religiosos, altares, tabernáculos y espacios de culto de arte sacro. En las actividades religiosas es frecuente la atribución de significados simbólicos y sagrados a ciertas relaciones y formas geométricas.

Geometría Fractal

Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular se repite a diferentes escalas. El término significa quebrado o fracturado. Muchas estructuras naturales son de tipo fractal. La propiedad matemática clave de un objeto fractal es que su dimensión métrica es un número no entero.

Sucesivos pasos de la construcción de la curva de Koch.

Fritjof Capra relaciona la geometría con las matemáticas de la complejidad para argumentar que la comprensión del patrón es fundamental para el entendimiento de la trama de la vida y que todas las cuestiones de patrón, orden y complejidad son esencialmente matemáticas.

Fue el matemático polaco nacido en Varsovia, Benoit Mandelbrot (1924-2010), quien acuñó el término fractal para describir la geometría de una gran variedad de fenómenos naturales irregulares.

El estudio moderno de los fractales

Aunque ha habido algunas discusiones acerca de su definición, podemos decir que un **fractal** es un objeto irregular que presenta autosimilitudes a ciertas escalas. Ejemplos típicos de fractal son, por ejemplo, el Romanesco (en la naturaleza) o el conocido como conjunto de Mandelbrot:

(Imagen del romanesco. La del conjunto de Mandelbrot se ha generado con Ultra Fractal.)

Qué verdura tan original y hermosa. Desde hace muchos años esta pieza que parece que ha sido traída de Venus ha llamado la atención a la gente en tiendas y mercados, y no me negarán que sus formas parecen de otro planeta. Esta geometría tan peculiar se llama geometría fractal, y es demasiado irregular para ser descrita en términos geométricos tradicionales. Pero bueno, es de aquí, y se llama romanesco o romanescu (*Brassica oleracea*). Esta verdura es de la familia de las *Brassicaceae*, del grupo itálica. Es un híbrido entre el conocido brécol o brócoli y la exquisita coliflor.

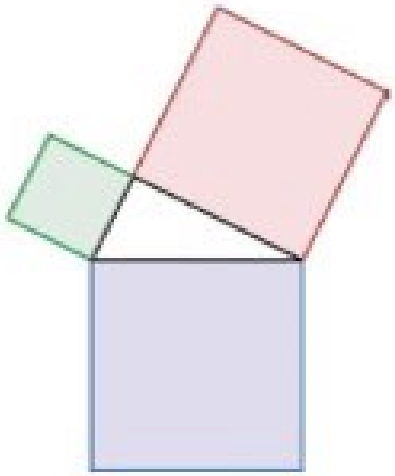
Patrones fractales encontrados en la naturaleza con Google Earth

Los fractales son unos de los objetos matemáticos más sorprendentes visualmente hablando. Y aunque definir lo que es un fractal no es fácil y su estudio es muy complejo, es

relativamente frecuente encontrarnos "patrones fractales" en la naturaleza. El romanesco es uno de los ejemplos más conocidos, pero no es el único. De hecho, podemos encontrar patrones fractales en nuestro propio planeta y algunos están mucho más cerca de lo que pensamos.

El fractal del teorema de Pitágoras

Representando de forma reiterada triángulos rectángulos con cuadrados apoyados en sus lados podemos obtener animaciones tan bonitas como esta, que podríamos llamar fractal del teorema de Pitágoras:



La representación fractal de la conjetura de Collatz

La conjetura de Collatz es uno de esos resultados atrayentes para muchos por tener un enunciado simple a la par que original. Un enunciado donde se describe una operación sencilla de realizar, convirtiendo esto a la conjetura en algo fácil de comprobar para cantidades pequeñas, que además tiene ese sabor a hecho difícil de demostrar en el caso general.

Los fractales también tienen esa capacidad de encandilar a cualquiera que le dedique al tema unos minutos de atención. Porque los fractales, tipo el fractal de Fibonacci, o los fractales tipo el conjunto de Mandelbrot, rezuman belleza por los cuatro costados.

El fractal de Fibonacci, una auténtica belleza de construcción

Hay entes matemáticos que, por alguna misteriosa razón, necesitan tener protagonismo, necesitan sentirse importantes. Para conseguirlo intentan por todos los medios aparecer en cualquier situación, en cualquier lugar. O al menos eso parece.

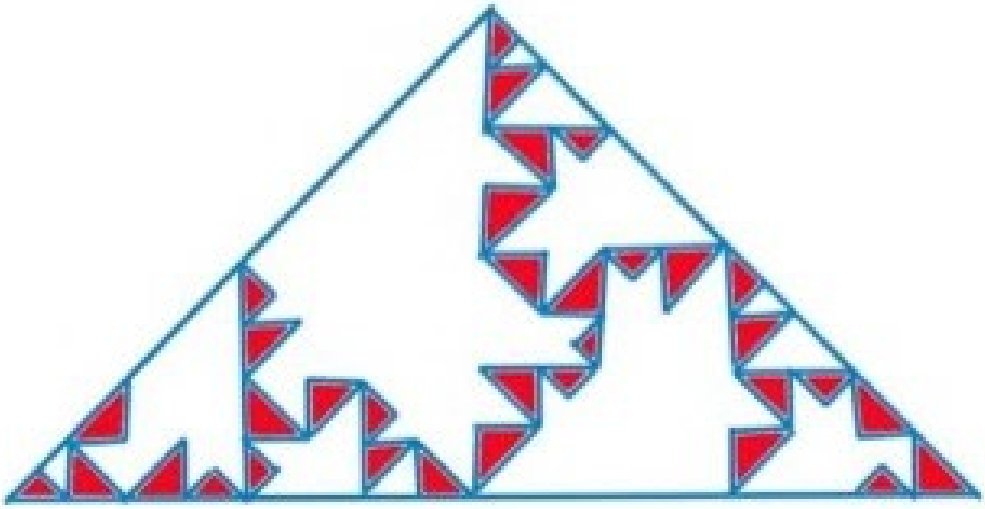
Uno de ellos, como ya sabemos, es el número π, al que podemos encontrar en los lugares más insospechados (como en la probabilidad de escoger dos números primos relativos).

El número e no le va a la zaga, también aparece en lugares donde no se lo espera. Y, sin lugar a duda, el número áureo Φ y la sucesión de Fibonacci, en general, poseen la misma característica. La podemos encontrar junto al triángulo de Pascal, en animales y tarjetas o en otras situaciones relacionadas con la naturaleza.

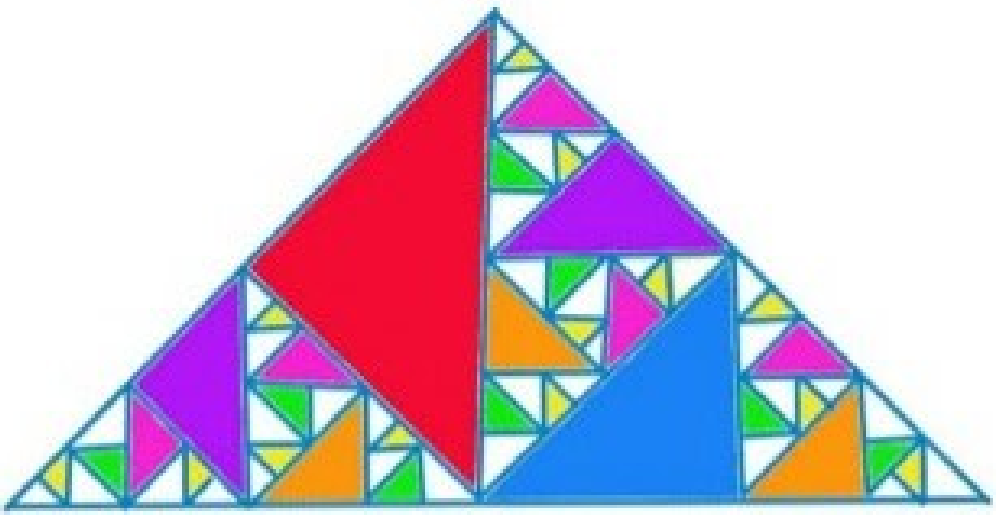
Pero ¿en un fractal? Pues sí, la sucesión cuyo estudio comenzó Leonardo de Pisa, Fibonacci, es otro de esos conceptos matemáticos que nunca dejarán de sorprendernos.

Parece clara la regularidad que siguen las diversas cantidades de triángulos que coloreamos de diferentes colores, ¿verdad?: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... Vamos, **los elementos de la sucesión de Fibonacci**.

Si eliminamos las líneas sobrantes y coloreamos igual todos los triángulos que nos han quedado, obtenemos el siguiente elemento de la sucesión de Fibonacci, 34 en este caso:



Y si añadimos todos los triángulos que habíamos eliminado y coloreamos con el mismo color los que tengan la misma área, volvemos a obtener los elementos de la sucesión de Fibonacci (contando los que tienen el mismo color):



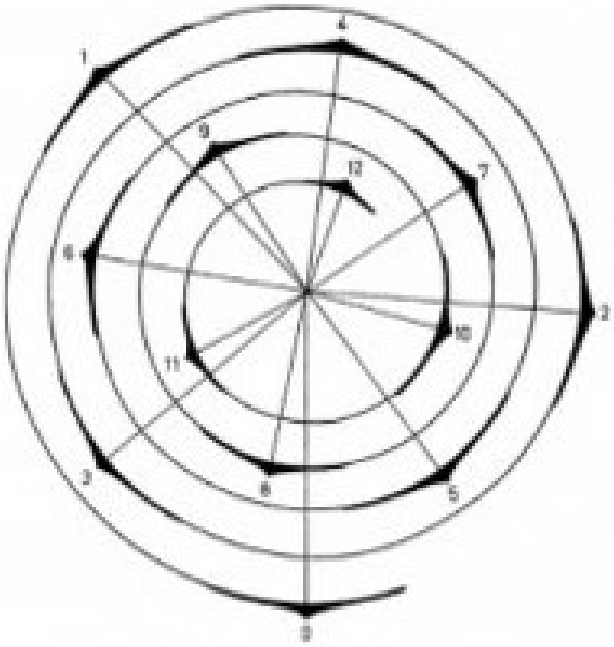
Una de las construcciones más curiosas, interesantes, sorprendentes y bellas (en el sentido matemático) que se haya conocido desde siempre.

Este *fractal de Fibonacci* se conoce también como el racimo de Grossman por su "autor", George W. Grossman.

El mito de la proporción áurea
Phyllotaxis: La secuencia de Fibonacci en la naturaleza
Los ángulos de divergencia y razones Phyllotactic

El termino *filotaxis* significa "disposición de las hojas" en griego y fue acuñado en 1754 por Charles Bonnet, un naturalista suizo ("Story", Livio 109).

En la década de 1830 un par de hermanos científicos encontró que cada nueva hoja en un tallo de la planta se coloca en un ángulo determinado a la anterior y que este ángulo es constante entre las hojas: por lo general, alrededor de 137,5 grados. Es decir, si se mira hacia abajo desde arriba en la planta y se mide el ángulo formado entre una línea trazada desde el tallo a la hoja y una línea correspondiente para la siguiente hoja, se encuentra que en general hay un ángulo fijo, llamado *el ángulo de divergencia*.



El recuento de pétalos de margaritas de campo es, por lo general, de trece, veintiuno o treinta y cuatro, todos los números de Fibonacci consecutivos. La cabeza de la semilla también se compone de las espirales de Fibonacci antes mencionadas. Las piñas también exhiben estos patrones en espiral, como se verá más adelante.

Una margarita con 21 pétalos

Suponiendo que el sol y la lluvia vienen de arriba, ortogonales (perpendiculares) al plano de la hoja, el ángulo de divergencia debe ser tal como para minimizar la obstrucción de las hojas inferiores por las hojas superiores. Por lo tanto, cualquier tipo de arreglo de la hoja periódica se debe evitar, si es posible, ya que esto dará lugar a dicho bloqueo. Así, se obtiene la solución óptima si dividimos el círculo formado por la planta (es decir, en la imagen de arriba) por un número irracional.

Se determinó que la proporción áurea es el número más irracional, y por lo tanto se llega a un ángulo de divergencia de 360/ (phi) = 222,5, o, equivalentemente, 360-222.5 = 137,5 grados, que es el ángulo más frecuentemente observado.

Ángulo de oro (Phi)

Los botánicos definen la *relación phyllotactic* como la fracción de un círculo a través del cual una nueva hoja pasa de la hoja anterior. En el caso de un ángulo de divergencia 137,5 grados, la relación es de 1 / phi, que es de aproximadamente 0.618. Puesto que esto es más de la mitad del círculo, restamos esto desde uno para obtener 1 / (phi^2), o alrededor de 0.382 en la aproximación de esta manera racional, llegamos a la razón de dos números de Fibonacci:

$$\text{Phyllotactic ratio} = \frac{1}{\Phi^2} \approx \frac{F_n}{F_{n+2}}$$

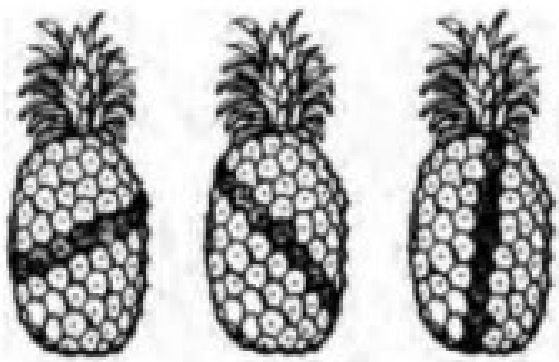
Así, podemos ver que a medida que el número de hojas tiende a infinito (lo que implica que *n* tiende a infinito), la relación phyllotactic se convierte en una aproximación mejor y mejor de 1 / (phi^2).

Sin embargo, todas estas afirmaciones se hacen sobre la base de dos supuestos. En primer lugar, que las plantas tienen hojas infinitas, y, en segundo lugar, que la máxima exposición al sol es el único factor que determina la colocación de la hoja. Ninguna de estas situaciones es un ángulo de divergencia de 137,5 grados.

Ejemplos de Phyllotaxis basada en proporción áurea

Ahora que hemos explorado la teoría de la filotaxis basados en phi, consideremos varios ejemplos en los que esto ocurre en realidad.

En primer lugar, la piña. Cada escala en la fruta es un hexágono y es parte de tres espirales diferentes a lo largo de la corteza.



Espirales en una cáscara de piña.

En la imagen de arriba, hay ocho espirales de suaves pendientes (izquierda), trece espirales más pronunciadas (centro), y veintiún espirales muy empinadas. La mayoría

de las piñas tienen cinco, ocho, trece, o veintiún espirales de aumento de la pendiente en su superficie. Todos estos son los números de Fibonacci.

Espirales de Fibonacci en una piña.

Pasamos ahora nuestra discusión al girasol, en el que se puede observar dos familias de patrones en espiral hacia la derecha: uno de bobinado y el otro hacia la izquierda. La cantidad de espirales en cada familia es siempre dos números de Fibonacci consecutivos. Este efecto es el resultado de embalaje de puntos separados por 137,5 grados en espirales apretadas. Esto implica que la filotaxis con base en la proporción de oro, permite no sólo para una exposición óptima al sol, sino también para el embalaje máximo en el espacio horizontal.

El modelo dinámico

La investigación ha demostrado que los brotes colocados a lo largo de una espiral y separados por un ángulo de 137,5°, conocido también como el ángulo de oro, se embalan más eficientemente a lo largo de la espiral.

Debido a que la planta está creciendo continuamente, cada una de las sucesivas formas del primordio está en un punto a lo largo del meristemo, y luego se mueve radialmente hacia el exterior a una velocidad proporcional al crecimiento del tallo.

La regla nos dice que el segundo primordio se coloca lo más lejos posible del primero, y el tercero se coloca a una distancia más alejada tanto del primero y del segundo primordios. Como aumenta el número de primordios, el ángulo de divergencia finalmente converge a un valor constante de 137,5 grados y, por lo tanto, crea una serie de Fibonacci en espiral.

Sin embargo, este modelo no es más que eso: un modelo. Las normas Phyllotaxis que se han descrito no pueden tomarse como aplicables a todas las circunstancias, como una ley de la naturaleza. Por el contrario, en las palabras del famoso matemático canadiense Coxeter, son "sólo un fascinante prevalente" o una tendencia.

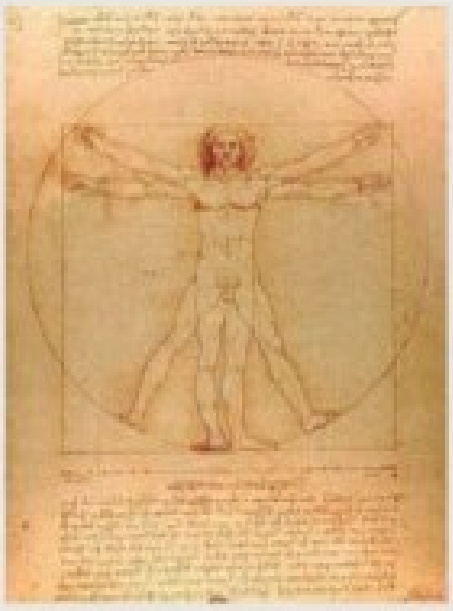
Las claves de la vida

Para Blavatsky la geometría es la quinta llave y la matemática la séptima llave que permiten interpretar la vida:

1. Fisiológica.
2. Psicológica.
3. Astrológica.
4. Metafísica.
5. Geométrica.
6. Simbólica.
7. Matemática.

Hombre de Vitruvio

Desde la fisiología la aplicación de la geometría se puede encontrar en el hombre vitruviano propuesto por Leonardo da Vinci.



El hombre de Vitruvio
Leonardo da Vinci, 1487
Dibujo • Renacimiento
34,4 cm × 25,5 cm
Galería de la Academia de Venecia, Venecia, Italia

El Hombre de Vitruvio es un famoso dibujo acompañado de notas anatómicas de Leonardo da Vinci realizado alrededor del año 1490 en uno de sus diarios. Representa una figura masculina desnuda en dos posiciones sobreimpresas de brazos y piernas e inscrita en una circunferencia y un cuadrado (*Ad quadratum*).

Se trata de un estudio de las proporciones del cuerpo humano, realizado a partir de los textos de arquitectura de Vitruvio, arquitecto de la antigua Roma, del cual el dibujo toma su nombre. También se conoce como el *Canon de las proporciones humanas*.

Con el arquitecto Vitruvio nace la ergonometría. La ergonomía se puede definir como el estudio de las necesidades de las personas en cualquier espacio. Es por eso por lo que la ergonomía es un objeto de estudio de los arquitectos.

Las proporciones del cuerpo humano realizadas por Vitruvio son:

- El rostro, desde la barbilla hasta la parte más alta de la frente, donde están las raíces del pelo, mide una décima parte de la altura total.
- La palma de la mano, desde la muñeca hasta el extremo del dedo medio, mide exactamente lo mismo.
- La cabeza, desde la barbilla hasta su coronilla, mide la octava parte de todo el cuerpo.
- Desde el esternón hasta las raíces del pelo equivale a una sexta parte de todo el cuerpo.
- Desde la parte media del pecho hasta la coronilla, una cuarta parte de todo el cuerpo.
- Del mentón hasta la base de la nariz, mide una tercera parte del rostro.
- La frente mide igualmente otra tercera parte del rostro.
- El pie equivale a un sexto de la altura del cuerpo.
- El codo, una cuarta parte de todo el cuerpo.
- El pecho equivale igualmente a una cuarta parte de todo el cuerpo.
- El ombligo es el punto central natural del cuerpo humano. En efecto, si se coloca un hombre boca arriba, con sus manos y sus pies estirados, situando el centro del compás en su ombligo y trazando una circunferencia, esta tocaría la punta de ambas manos y los dedos de los pies.
- La figura circular trazada sobre el cuerpo humano nos posibilita el lograr también un cuadrado: si se mide desde la planta de los pies hasta la coronilla, la medida resultante será la misma que se da entre las puntas de los dedos con los brazos extendidos.

Además, Leonardo corrige algunas proporciones y añade otras:

- Cuatro dedos hacen una palma.
- Cuatro palmas hacen un pie.
- Seis palmas hacen un codo.
- Cuatro codos hacen un paso.
- Veinticuatro palmas hacen a un hombre.
- Si separas la piernas lo suficiente como para que tu altura disminuya 1/14 y estiras y subes los hombros hasta que los dedos estén al nivel del borde superior de tu cabeza, has de saber que el centro geométrico de tus extremidades separadas estará situado en tu ombligo y que el espacio entre las piernas será un triángulo equilátero.
- Desde la parte superior del pecho al nacimiento del pelo será la séptima parte del hombre completo.

- Desde los pezones a la parte de arriba de la cabeza será la cuarta parte.
- La anchura mayor de los hombros contiene en sí misma la cuarta parte.
- Desde el codo a la punta de la mano será la quinta parte.
- Desde el codo al ángulo de la axila será la octava parte.
- La mano completa será la décima parte.
- El comienzo de los genitales marca la mitad del hombre.
- El pie es la séptima parte.
- Desde la planta del pie hasta debajo de la rodilla será la cuarta parte.
- Desde debajo de la rodilla al comienzo de los genitales será la cuarta parte.
- La distancia desde la parte inferior de la barbilla a la nariz y desde el nacimiento del pelo a las cejas es, en cada caso, la misma, y, como la oreja.
- Desde el inicio de la rodilla hasta el inicio de la pelvis será la misma medida del torso.
- Desde el centro del pecho hasta la punta de los dedos será igual a la longitud de toda la pierna.

El redescubrimiento de las proporciones matemáticas del cuerpo humano en el siglo XV por Leonardo y otros autores está considerado como uno de los grandes logros del Renacimiento. El dibujo también es a menudo considerado como un símbolo de la simetría básica del cuerpo humano y, por extensión, del universo en su conjunto.

Examinando el dibujo puede notarse que la combinación de las posiciones de los brazos y piernas crea realmente dieciséis (16) posiciones distintas. La posición con los brazos en cruz y los pies juntos se ve inscrita en el cuadrado sobreimpreso.

Por otra parte, la posición superior de los brazos y las dos de las piernas se ve inscrita en el círculo sobreimpreso.

Esto ilustra el principio que, en el cambio entre las dos posiciones, el centro aparente de la figura parece moverse, pero en realidad el ombligo de la figura, que es el centro de masas verdadero, permanece inmóvil.

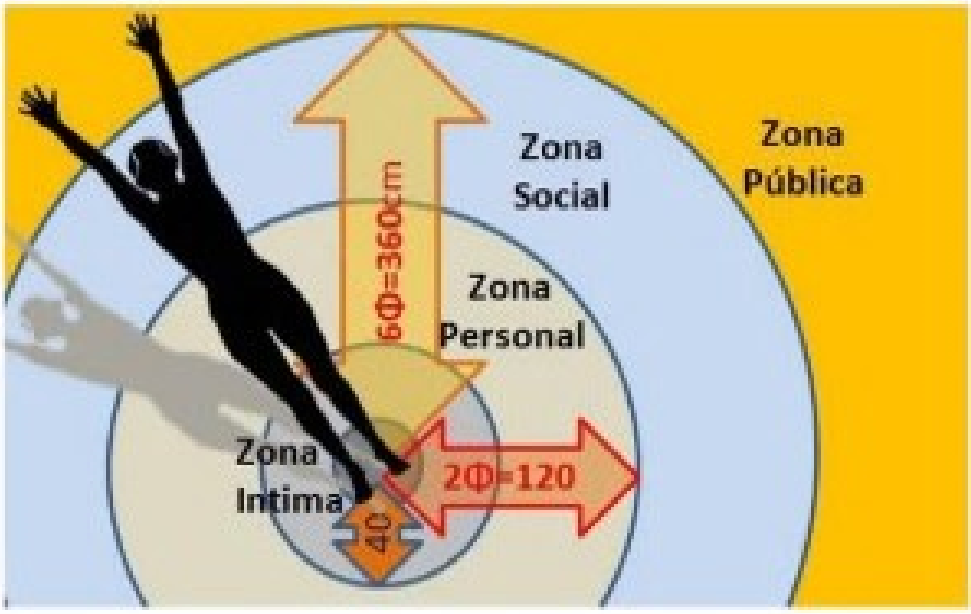
Marco Vitruvio Polión

Arquitecto, escritor e ingeniero romano del siglo I a. C. Fue arquitecto de Julio César durante su juventud, y al retirarse del servicio entró en la arquitectura civil, siendo de este periodo su única obra conocida, la basílica de Fanum. Es el autor del tratado sobre arquitectura más antiguo que se conserva y el único de la antigüedad clásica, *De Architectura*, en 10 libros (probablemente escrito entre los años 27 a. C. y 23 a. C.).

Proxémica áurea

Descripción

El diagrama describe las distancias proxémicas, según Eduard Hall y la relación con la sección áurea que utiliza Ibo Bonilla para calcular el "cubo de aire áureo".



El término proxémica es el que el antropólogo Edward Twitchell Hall propuso para referirse al estudio del uso y percepción del espacio social y personal, dentro del contexto cultural, para referirse a la "distancia interpersonal" que mantenemos cada uno de nosotros con relación a los demás.

Hall notaba que la distancia social entre la gente está generalmente correlacionada con la distancia física y describia cuatro diferentes tipos de distancia:

- **Distancia intima:** que se presenta en fase próxima entre 0 y 15 centímetros, y en fase lejana entre 15 y 45 centímetros. En esta situación se presenta la posibilidad de mantener un gran contacto sensorial (visual, olfativo, térmico, táctil) entre las personas.
- **Distancia personal:** que en fase próxima se da entre los 45 y 75 centímetros, y en fase lejana entre los 75 y 125 centímetros. Se presenta un cercano contacto sensorial entre las personas, en el que el límite depende del alcance de las extremidades para saludarse, tocarse, darse la mano, etcétera.
- **Distancia social**, entre 1.25 y 2 metros en fase próxima, y entre 2 y 3.5 metros en fase lejana. En esta situación se presenta un contacto sensorial débil, como se da entre compañeros de trabajo.
- **Distancia pública**, que en fase próxima se presenta entre los 3.5 y 7.25 m, y mayor a los 7.25 metros en fase lejana. En esta situación se presenta un escaso contacto sensorial, típico en relaciones muy formales, conferencias, discursos, situaciones sociales entre desconocidos, etcétera.

La invasión que se puede presentar a estos espacios no solamente es corporal, también puede ser auditiva, olfativa, o sensorial de algún otro tipo, por lo que entre compañeros con los que no se mantienen relaciones personales, el mantener distancias inferiores a 1.25 o 1.5 metros puede dar lugar a conflictos.

Clave psicológica

La psicología de la Gestalt plantea la existencia de *todos* irreductibles como un aspecto clave de la percepción.

Clave astrológica

Desde la astrología la división del zodíaco en doce partes permite la comprensión del proceso de la vida.

Clave metafísica

Desde la metafísica el símbolo más representativo es el cubo de Metatrón, ya que contiene la réplica tridimensional de cuatro de los cinco sólidos platónicos, a los que Pitágoras llamaba sólidos perfectos.

Clave geométrica

Teniendo en cuenta la geometría, la vida se inicia como un óvulo o esfera, pasa a convertirse en un tetraedro, después en una estrella tetraédrica y, posteriormente, en un cubo, a continuación en una nueva esfera y termina en un corpúsculo tubular.

Clave simbólica

De acuerdo con la semiótica, un símbolo es la representación de una idea. Para Djwhal Khul la representación del punto, la línea, el triángulo, el cuadrado, la cruz, el pentágono y el círculo significa el reconocimiento de un vínculo con el conocimiento que ha determinado el desarrollo hasta la fecha. Plantea que en todas las razas hay siete formas análogas, y, actualmente, son veintiuno los símbolos básicos que en forma geométrica encierran los conceptos de la civilización.

La esfera giratoria de materia puede ser representada empleando los mismos símbolos generales cósmicos que se utilizan para representar la evolución:

1. El círculo representa el límite de la materia indiferenciada.
2. La circunferencia con un punto en el centro representa la producción de calor en el corazón de la materia como un punto de fuego.
3. La división del círculo en dos partes marca la rotación activa y la iniciación del movimiento del átomo de la materia.
4. La división del círculo en cuatro partes representa la cruz de brazos iguales del Espíritu Santo, personificación de la materia inteligente activa. Como símbolo astrológico representa el planeta Tierra.
5. La esvástica representa el fuego que se extiende de la periferia al centro en cuatro direcciones, que circula e irradia gradualmente alrededor de toda ella.

Clave matemática

Leonardo Fibonacci fue el matemático que descubrió determinado orden en el crecimiento de las plantas. La secuencia es 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233... Si se divide un término de esta secuencia por el anterior, repitiendo el proceso el número se va acercando a 1,6180339 (89/55), coincidiendo con el número áureo definido por Euclides. La causa de este modelo secuencial se encuentra en la espiral media dorada que gira sin principio ni fin.

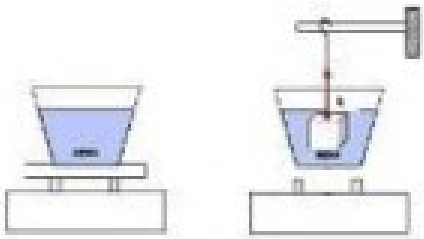
En matemáticas, rosa polar es el nombre que recibe cualquier miembro de una familia de curvas de ecuación $r(\theta) = \cos(k\theta)$ por asemejarse a una flor de pétalos. Esta familia, también conocida como rhodoneas (del griego rhodon, rosa), fue estudiada por el matemático italiano Luigi Guido Grandi, en torno al 1725, en su libro *Flores Geometrici*.

Peso específico

Se le llama peso específico a la relación entre el peso de una sustancia y su volumen. Su expresión de cálculo es:

$$\gamma = \frac{P}{V}$$

γ, el peso específico;
P, el peso de la sustancia;
V, el volumen de la sustancia.



Puede expresarse en newtons sobre metro cúbico (en el Sistema Internacional) o en kilopondios sobre metro cúbico (en el Sistema Técnico).

Es importante destacar que el kilopondio (también conocido como kilogramo-fuerza) es la fuerza que ejerce la gravedad del planeta Tierra sobre una masa de un kilogramo. Esto quiere decir que el valor del peso específico expresado en kilopondios sobre metro cúbico resulta equivalente al valor de la densidad (que se expresa en kilogramos sobre metro cúbico).

El peso específico, por lo tanto, es el peso de una sustancia por unidad de volumen. La densidad, por otra parte, refiere a la masa de una sustancia por unidad de volumen y se obtiene a través de la división de una masa conocida del material en cuestión por su volumen.

Si tomamos el caso del agua congelada, advertiremos que su peso específico es de 9170 newtons sobre metro cúbico, mientras que su densidad es de 0,917 kilogramos sobre metro cúbico.

Si bien la densidad y el peso específico son conceptos diferentes, tienen una estrecha relación entre sí. Por ejemplo, si tomamos la fórmula del peso de un cuerpo (**P = m.g**, masa por aceleración de la gravedad) y la usamos para sustituir la variable p en la fórmula de peso específico (**Pe = p/V**, peso sobre volumen), obtenemos lo siguiente: **Pe = m.g/V**. Esto también puede expresarse como **Pe = (m/V).g** y, dado que la densidad es

la masa sobre el volumen, puede concluirse que el peso específico es igual a la densidad multiplicada por la aceleración de la gravedad: **Pe = δ.g**.

Conocer el peso específico de un cuerpo puede ser muy importante a nivel industrial para determinar cuáles son las mejores condiciones para su procesamiento, por ejemplo. Todo dependerá de las características del producto que se planea obtener. Gracias a la determinación del peso específico, y también en algunos casos de la densidad, se puede obtener la mejor calidad física y fisiológica de ciertos productos, tales como el arroz, el vino (a través del análisis del mosto, ya que, a mayor peso específico, mayor contenido de azúcar), las gemas y el cemento.

Peso específico relativo

Se denomina peso específico relativo de una sustancia dada a su peso unitario dividido por el peso unitario del agua cuando se destila a una temperatura de 4 °C. Este valor se usa para la predicción del peso unitario de un suelo, para realizar el análisis de hidrómetro y para el cálculo de la relación de vacíos de un suelo. Para los granos es el valor considerado promedio y, por lo general, sirve para llevar a cabo la clasificación de sus minerales. Cabe mencionar que este concepto también se denomina *gravedad específica*.

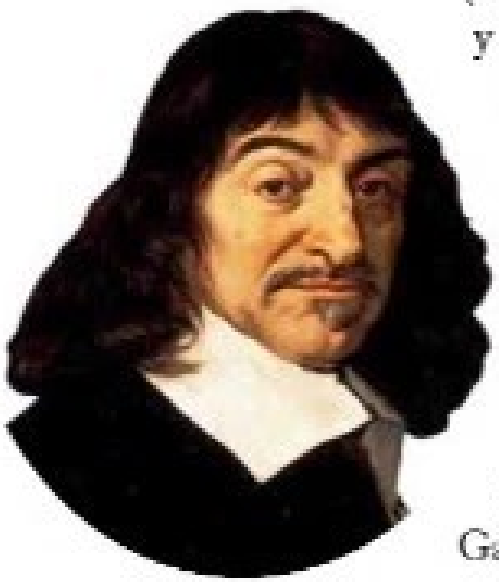
Cuando se desea determinar el peso específico relativo de un suelo se establecen dos procedimientos: uno para aquellos que consisten en partículas más pequeñas que 5 milímetros; otro para los restantes. Por medio de un tamiz número 4 es posible realizar dicha clasificación, para aplicar el método que corresponda a cada muestra, luego de lo cual se deberá obtener el promedio ponderado de ambas.

CAPÍTULO III

GEOMETRÍA ANALÍTICA

CAPÍTULO III
GEOMETRÍA ANALÍTICA

René Descartes



(La Haye, Francia, 1596 - Estocolmo, Suecia, 1650) Filósofo y matemático francés. Después del esplendor de la antigua filosofía griega y del apogeo y crisis de la escolástica en la Europa medieval, los nuevos aires del Renacimiento y la revolución científica que lo acompañó darían lugar, en el siglo XVII, al nacimiento de la filosofía moderna. Descartes se propuso hacer tabla rasa de la tradición y construir un nuevo edificio sobre la base de la razón y con la eficaz metodología de las matemáticas. Su «duda metódica» no cuestionó a Dios, sino todo lo contrario; sin embargo, al igual que Galileo, hubo de sufrir la persecución a causa de sus ideas.

Biografía

En el Colegio *La Flèche*, Descartes obtuvo el título de bachiller y de licenciado en derecho por la facultad de Poitiers (1616), y a los veintidós años partió hacia los Países Bajos, donde sirvió como soldado. En 1619 se enroló en las filas del duque de Baviera.

Según relataría el propio Descartes en el *Discurso del Método*, durante el crudo invierno de ese año, y tras una fuerte crisis de escepticismo, se le revelaron las bases sobre las cuales edificaría su sistema filosófico: el método matemático y el principio del *cogito, ergo sum*. Víctima de una febril excitación, durante la noche del 10 de noviembre de 1619 tuvo tres sueños, en cuyo transcurso intuyó su método y conoció su profunda vocación de consagrar su vida a la ciencia.

En 1628 decidió instalarse en Holanda, país en el que las investigaciones científicas gozaban de gran consideración y, además, se veían favorecidas por una relativa libertad de pensamiento. Descartes consideró que era el lugar más favorable para cumplir los objetivos filosóficos y científicos que se había fijado, y residió allí hasta 1649.

Los cinco primeros años los dedicó principalmente a elaborar su propio sistema del mundo y su concepción del hombre y del cuerpo humano.

En 1633 debía de tener ya muy avanzada la redacción de un amplio texto de metafísica y física titulado *Tratado sobre la luz*; sin embargo, la noticia de la condena de

Galileo le asustó, puesto que también Descartes sostenía en aquella obra el movimiento de la Tierra.

En 1637 apareció su famoso *Discurso del método*, presentado como prólogo a tres ensayos científicos. Descartes proponía en el *Discurso* una duda metódica, que sometiese a juicio todos los conocimientos de la época, la suya era una duda orientada a la búsqueda de principios últimos sobre los cuales cimentar sólidamente el saber. Este principio lo halló en la existencia de la propia conciencia que duda, en su famosa formulación «pienso, luego existo».

El método cartesiano, que Descartes propuso para todas las ciencias y disciplinas, consiste en descomponer los problemas complejos en partes progresivamente más sencillas hasta hallar sus elementos básicos. Los ensayos científicos que seguían al *Discurso* ofrecían un compendio de sus teorías físicas, entre las que destaca su formulación de la ley de inercia y una especificación de su método para las matemáticas.

Los fundamentos de su física mecanicista, que hacía de la extensión la principal propiedad de los cuerpos materiales, fueron expuestos por Descartes en las *Meditaciones metafísicas* (1641), donde desarrolló su demostración de la existencia y la perfección de Dios y de la inmortalidad del alma.

Conforme crecía su fama y la divulgación de su filosofía, arreciaron las críticas y las amenazas de persecución religiosa por parte de algunas autoridades académicas y eclesiásticas, tanto en los Países Bajos como en Francia.

Descartes con la reina Cristina de Suecia

Cansado de estas luchas, en 1649 Descartes aceptó la invitación de la reina Cristina de Suecia, que le exhortaba a trasladarse a Estocolmo como preceptor suyo de filosofía. Descartes murió de una pulmonía a principios de 1650, cinco meses después de su llegada.

La filosofía de Descartes

Descartes es considerado como el iniciador de la filosofía racionalista moderna. En el *Discurso del método* (1637), manifestó que su proyecto consistía en elaborar una doctrina basada en principios totalmente nuevos.

Convencido de que la realidad entera respondía a un orden racional, su propósito era crear un método que hiciera posible alcanzar en todo el ámbito del conocimiento la misma certidumbre que proporcionan en su campo la aritmética y la geometría.

El sistema utilizado por Descartes para cumplir el primer precepto y alcanzar la certeza es «la duda metódica».

Pienso, luego existo

La duda, razona entonces Descartes, es un pensamiento: dudar es pensar. Ahora bien, no es posible pensar sin existir. De ahí su célebre formulación: pienso, luego existo (*cogito, ergo sum*).

En la medida en que la sustancia de la materia y de los cuerpos es la extensión, y en que esta es observable y mesurable, ha de ser posible explicar sus movimientos y cambios mediante leyes matemáticas. El universo es como una enorme máquina cuyo funcionamiento podremos llegar a conocer mediante el estudio y descubrimiento de las leyes matemáticas que lo rigen.

La geometría analítica estudia las figuras geométricas mediante técnicas básicas del análisis matemático y del álgebra en un determinado sistema de coordenadas. Su desarrollo histórico comienza con la geometría cartesiana, continúa con la aparición de la geometría diferencial de Carl Friedrich Gauss y más tarde con el desarrollo de la geometría algebraica. Actualmente la geometría analítica tiene múltiples aplicaciones más allá de las matemáticas, la ingeniería y la arquitectura.

Las dos cuestiones fundamentales de la geometría analítica son:

1. Dada la curva en un sistema de coordenadas, obtener su ecuación.
2. Dada la ecuación indeterminada, polinomio, o función, determinar en un sistema de coordenadas la gráfica o curva algebraica de los puntos que verifican dicha ecuación.

Lo novedoso de la geometría analítica es que representa las figuras geométricas mediante fórmulas del tipo $f(x) = y$, donde f es una función u otro tipo de expresión matemática: las rectas se expresan como ecuaciones polinómicas de grado 1 (por ejemplo, $2x + 6y = 0$), las circunferencias y el resto de cónicas como ecuaciones polinómicas de grado 2 (la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, la hipérbola $xy = 1$), etc.

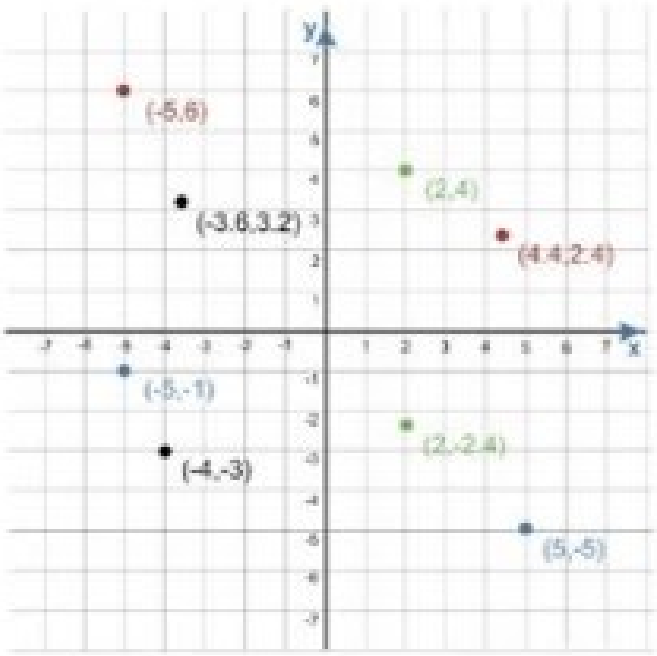
Construcciones fundamentales

En un sistema de coordenadas cartesianas, un punto del plano queda determinado por dos números, llamados *abscisa* y *ordenada* del punto. Mediante ese procedimiento a todo punto del plano corresponden siempre dos números reales ordenados (abscisa y ordenada), y recíprocamente, a un par ordenado de números corresponde un único punto del plano.

Consecuentemente el sistema cartesiano establece una correspondencia biunívoca entre un concepto geométrico como es el de los puntos del plano y un concepto algebraico como son los pares ordenados de números. Esta correspondencia constituye el fundamento de la geometría analítica.

Con la geometría analítica se pueden determinar figuras geométricas planas por medio de ecuaciones e inecuaciones con dos incógnitas. Este es un método alternativo de resolución de problemas, o cuando menos nos proporciona un nuevo punto de vista con el cual poder atacar el problema.

Localización de un punto en el plano cartesiano como distancia a los ejes



Ejemplos de ocho puntos localizados en el plano cartesiano mediante sus pares de coordenadas.

En un plano (v.g. papel milimetrado) se trazan dos rectas orientadas perpendiculares entre sí (ejes) —que por convenio se trazan de manera que una de ellas sea horizontal y la otra vertical— y cada punto del plano queda unívocamente determinado por las distancias de dicho punto a cada uno de los ejes, siempre y cuando se dé también un criterio para determinar sobre qué semiplano determinado por cada una de las rectas hay que tomar esa distancia, criterio que viene dado por un signo.

Ese par de números, las coordenadas, quedará representado por un par ordenado (x, y), siendo x la distancia a uno de los ejes (por convenio será la distancia al eje vertical) e y la distancia al otro eje (al horizontal).

En la coordenada x, el signo positivo (que suele omitirse) significa que la distancia se toma hacia la derecha sobre el eje horizontal (eje de las abscisas), y el signo negativo (nunca se omite) indica que la distancia se toma hacia la izquierda.

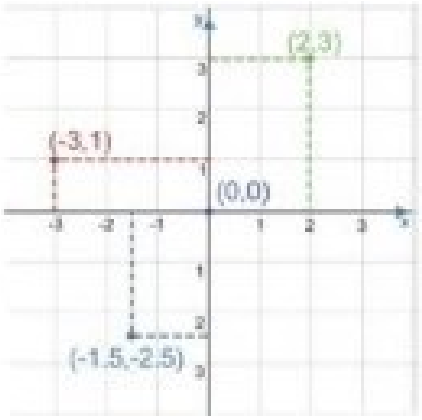
Para la coordenada y, el signo positivo (también se omite) indica que la distancia se toma hacia arriba sobre el eje vertical (eje de ordenadas), tomándose hacia abajo si el signo es negativo (en ningún caso se omiten los signos negativos).

A la coordenada x se la suele denominar *abscisa* del punto, mientras que a la y se la denomina *ordenada* del punto.

Los puntos del eje de abscisas tienen, por lo tanto, ordenada igual a 0, así que serán de la forma $(x, 0)$, mientras que los del eje de ordenadas tendrán abscisa igual a 0, por lo que serán de la forma $(0, y)$.

El punto donde ambos ejes se cruzan tendrá, por lo tanto, distancia 0 a cada uno de los ejes, luego su abscisa será 0 y su ordenada también será 0. A este punto —el $(0, 0)$ — se le denomina origen de coordenadas.

Como proyección sobre los ejes



Coordenadas asignadas a tres puntos diferentes (verde, rojo y azul), sus proyecciones ortogonales sobre los ejes constituyen sus coordenadas cartesianas.

Se consideran dos rectas orientadas, (ejes), perpendiculares entre sí, "x" e "y", con un origen común, el punto *O* de intersección de ambas rectas.

Teniendo un punto *P*, al cual se desea determinar las coordenadas, se procede de la siguiente forma:

Por el punto *P* se trazan rectas perpendiculares a los ejes, estas determinan en la intersección con los mismos dos puntos, *P'* (el punto ubicado sobre el eje *x*) y el punto *P''* (el punto ubicado sobre el eje *y*).

Dichos puntos son las proyecciones ortogonales sobre los ejes *x* e *y* del punto *P*.

A los Puntos *P'* y *P''* le corresponden por número la distancia desde ellos al origen, teniendo en cuenta que, si el punto *P'* se encuentra a la izquierda de *O*, dicho número será negativo, y si el punto *P''* se encuentra hacia abajo del punto *O*, dicho número será negativo.

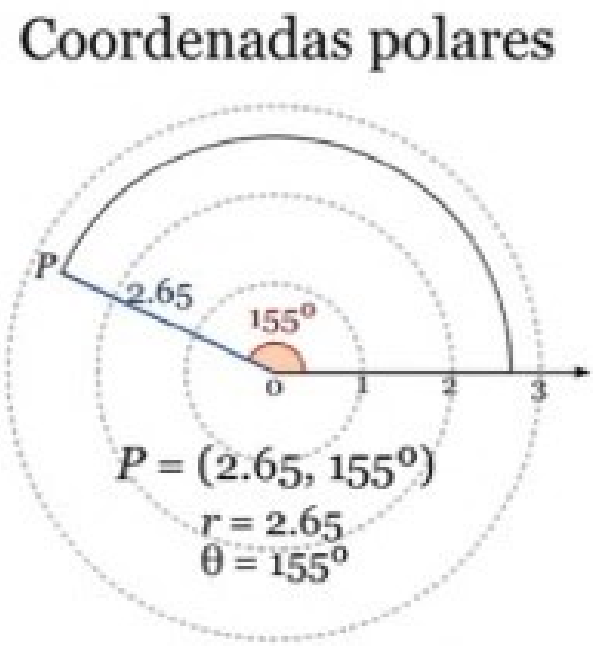
Los números relacionados con *P'* y *P''*, en ese orden son los valores de las coordenadas del punto *P*.

Ejemplo 1: *P'* se encuentra a la derecha de *O* una distancia igual a 2 unidades. *P''* se encuentra hacia arriba de *O*, una distancia igual a 3 unidades. Por lo que las coordenadas de *P* son (2, 3).

Ejemplo 2: *P'* se encuentra a la derecha de *O* una distancia igual a 4 unidades. *P''* se encuentra hacia abajo de *O*, una distancia igual a 5 unidades. Por lo que las coordenadas de *P* son (4, -5).

Ejemplo 3: *P'* se encuentra a la izquierda de *O* una distancia igual a 3 unidades. *P''* se encuentra hacia abajo de *O*, una distancia igual a 2 unidades. Por lo que las coordenadas de *P* son (-3, -2).

Ejemplo 4: P se encuentra a la izquierda de O una distancia igual a 6 unidades. P se encuentra hacia arriba de O, una distancia igual a 4 unidades. Por lo que las coordenadas de P son (-6, 4).



Localización de un punto en coordenadas polares

Las coordenadas polares o sistemas polares son un sistema de coordenadas bidimensional en el cual cada punto del plano se determina por una distancia y un ángulo, ampliamente utilizados en física y trigonometría.

De manera más precisa, se toman: un punto O del plano, al que se le llama *origen* o *polo*, y una recta dirigida (o rayo, o segmento OI.) que pasa por O, llamada eje polar (equivalente al eje x del sistema cartesiano), como sistema de referencia.

Con este sistema de referencia y una unidad de medida métrica (para poder asignar distancias entre cada par de puntos del plano), todo punto P del plano corresponde a un par ordenado (r, θ) donde r es la distancia de P al *origen* y θ es el ángulo formado entre el eje polar y la recta dirigida OP que va de O a P. El valor θ crece en sentido antihorario y decrece en sentido horario. La distancia r ($r \geq 0$) se conoce como la «coordenada radial» o «radio vector», mientras que el ángulo es la «coordenada angular» o «ángulo polar».

En el caso del origen, O, el valor de r es cero, pero el valor de θ es indefinido. En ocasiones se adopta la convención de representar el origen por (0,0°).

Historia

Si bien existen ejemplos de que los conceptos de ángulo y radio se conocen y manejan desde la antigüedad, no es sino hasta el siglo XVII, posterior a la invención de la geometría analítica, que se puede hablar del concepto formal del sistema de coordenadas polares.

Los primeros usos empíricos de relaciones entre ángulos y distancias se relacionan con aplicaciones a la navegación y al estudio de la bóveda celeste. El astrónomo Hiparco

(190 a. C.-120 a. C.) creó una tabla trigonométrica que daba la longitud de una cuerda en función del ángulo y existen referencias del uso de coordenadas polares para establecer la posición de las estrellas.

En *Sobre las espirales*, Arquímedes describe la espiral de Arquímedes, una función cuyo radio depende del ángulo. Sin embargo, estas aplicaciones no hacían uso de un sistema de coordenadas como medio de localizar puntos en el plano, situación análoga al estado de la geometría antes de la invención de la geometría analítica.

En tiempos modernos, Grégoire de Saint-Vincent y Bonaventura Cavalieri introdujeron de forma independiente el concepto a mediados del siglo XVII en la solución de problemas geométricos. Saint-Vincent escribió sobre este tema en 1625 y publicó sus trabajos en 1647, mientras que Cavalieri publicó sus escritos en 1635 y una versión corregida en 1653.

Cavalieri utilizó en primer lugar las coordenadas polares para resolver un problema relacionado con el área dentro de una espiral de Arquímedes. Blaise Pascal utilizó posteriormente las coordenadas polares para calcular la longitud de arcos parabólicos.

Sin embargo, el concepto abstracto de sistema de coordenada polar se debe a sir Isaac Newton, quien en su *Método de las fluxiones* escrito en 1671 y publicado en 1736, introduce ocho nuevos sistemas de coordenadas (además de las cartesianas) para resolver problemas relativos a tangentes y curvas, uno de los cuales, el séptimo, es el de coordenadas polares. En el periódico *Acta Eruditorum* Jacob Bernoulli utilizó en 1691 un sistema con un punto en una línea, llamándolos polo y eje polar respectivamente. Las coordenadas se determinaban mediante la distancia al *polo* y el ángulo respecto al *eje polar*. El trabajo de Bernoulli sirvió de base para encontrar el radio de curvatura de ciertas curvas expresadas en este sistema de coordenadas.

El término actual de *coordenadas polares* se atribuye a Gregorio Fontana, y fue utilizado por los escritores italianos del siglo XVIII. El término aparece por primera vez en inglés en la traducción de 1816 efectuada por George Peacock del *Tratado del cálculo diferencial y del cálculo integral* de Sylvestre François Lacroix, mientras que Alexis Clairaut fue el primero que pensó en ampliar las coordenadas polares a tres dimensiones.

El centro de coordenadas está definido por una distancia nula, independientemente de los ángulos que se especifiquen. Normalmente se utilizan las coordenadas arbitrarias $(0, \theta)$ para representar el polo, ya que independientemente del valor que tome el ángulo θ, un punto con radio 0 se encuentra siempre en el polo. Estas circunstancias deben tenerse en cuenta para evitar confusiones en este sistema de coordenadas.

Conversión de coordenadas

Paso de coordenadas polares a rectangulares y viceversa

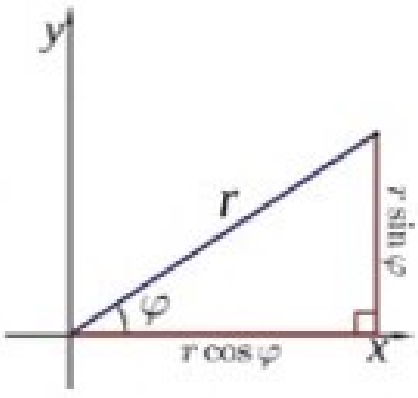


Diagrama ilustrativo de la relación entre las coordenadas polares y las coordenadas cartesianas.

En el plano de ejes xy con centro de coordenadas en el punto O se puede definir un sistema de coordenadas

polares de un punto **M** del plano, definidas por la distancia **r** al centro de coordenadas, y el ángulo φ del vector de posición sobre el eje **x**.

Conversión de coordenadas polares a rectangulares

Definido un punto en coordenadas polares por su ángulo φ sobre el eje x, y su distancia **r** al centro de coordenadas, se tiene:

$$\mathbf{X = r\,Cos\,\varphi}$$
$$\mathbf{y = r\,Sen\,\varphi}$$

Conversión de coordenadas rectangulares a polares

Definido un punto del plano por sus coordenadas rectangulares (x, y), se tiene que la coordenada polar *r* es:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Para determinar la coordenada angular φ, se deben distinguir dos casos:

- Para r = 0, el ángulo φ puede tomar cualquier valor real.
- Para r ≠ 0, para obtener un único valor de φ, debe limitarse a un intervalo de tamaño 360°.

Por convención, los intervalos utilizados son (0, 360°) y (–90°, 90°).
Para obtener en el intervalo [0, 360°), se debe usar la siguiente fórmula:

$$\mathbf{\varphi = arc.\,Tg\,(y/x)}$$

Ecuaciones polares

Se le llama *ecuación polar* a la ecuación que define una curva expresada en coordenadas polares. En muchos casos se puede especificar tal ecuación definiendo el radio **r** como una función de θ. La curva resultante consiste en una serie de puntos en la forma (r(θ), θ) y se puede representar como la gráfica de una función.

Se pueden deducir diferentes formas de simetría de la ecuación de una función polar. Si **r**(−θ) = **r**(θ) la curva será simétrica respecto al eje horizontal (0°/180°), si **r**(180°−θ) = **r**(θ) será simétrica respecto al eje vertical (90°/ 270°), y si **r**(θ−a) = **r**(θ) será simétrico rotacionalmente a en sentido horario respecto al polo.

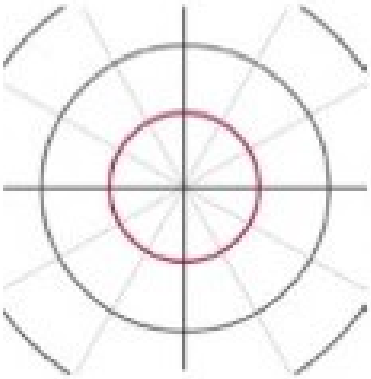
Debido a la naturaleza circular del sistema de coordenadas polares, muchas curvas se pueden describir con una simple ecuación polar, mientras que en su forma cartesiana sería mucho más intrincado. Algunas de las curvas más conocidas son la **rosa polar**, la **espiral de Arquímedes**, la **lemniscata**, el **caracol de Pascal** y la **cardioide**.

Para los apartados siguientes se entiende que el círculo, la línea y la rosa polar no tienen restricciones en el dominio y rango de la curva.

Circunferencia

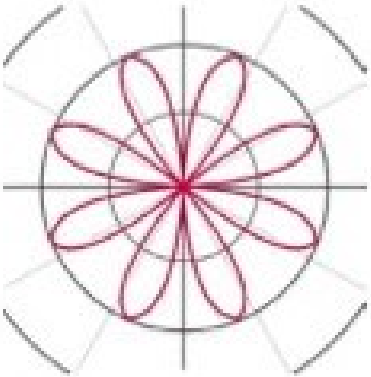
La ecuación general para una circunferencia con centro en (r_0, φ) y radio a es

$$r^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \varphi) + r_0^2 = a^2.$$



Una circunferencia con ecuación $r(\theta) = 1$.

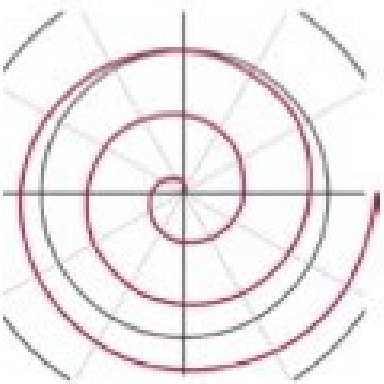
Rosa polar



Una rosa polar con ecuación $r(\theta) = 2 \sin 4\theta$.

La rosa polar es una famosa curva matemática que parece una flor con pétalos, y puede expresarse como una ecuación polar simple, para cualquier constante k (incluyendo al 0). Si k es un número entero, estas ecuaciones representan una rosa de k pétalos cuando k es impar, o $2k$ pétalos si k es par. Si k es racional pero no entero, la gráfica es similar a una rosa, pero con los pétalos solapados. Nótese que estas ecuaciones nunca definen una rosa con 2, 6, 10, 14, etc. pétalos. La variable a representa la longitud de los pétalos de la rosa.

Espiral de Arquímedes



Un brazo de la espiral de Arquímedes con ecuación $r(\theta) = \theta$ para $0 < \theta < 6\pi$.

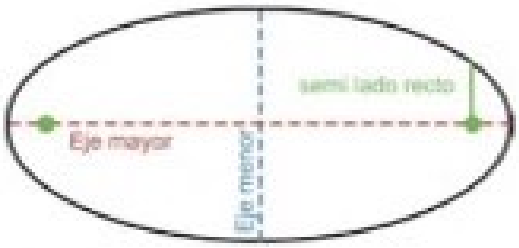
La espiral de Arquímedes es una famosa espiral descubierta por Arquímedes, la cual puede expresarse también como una ecuación polar simple. Se representa con la ecuación

$$r(\theta) = a + b\theta$$

Un cambio en el parámetro *a* producirá un giro en la espiral, mientras que *b* controla la distancia entre los brazos, la cual es constante para una espiral dada. La espiral de Arquímedes tiene dos brazos, uno para $\theta > 0$ y otro para $\theta < 0$. Los dos brazos están conectados en el polo. La imagen especular de un brazo sobre el eje vertical produce el otro brazo. Esta curva fue una de las primeras curvas, después de las secciones cónicas, en ser descritas en tratados matemáticos. Además, es el principal ejemplo de curva que puede representarse de forma más fácil con una ecuación polar.

Otros ejemplos de espirales son la espiral logarítmica y la espiral de Fermat.

Secciones cónicas



Elipse, indicándose su semilado recto.

Una sección cónica con un foco en el polo y el otro en cualquier punto del eje horizontal (de modo que el semieje mayor de la cónica descanse sobre el eje polar) es dada por:

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta}$$

Donde e es la excentricidad y l es el semilado recto (la distancia perpendicular a un foco desde el eje mayor a la curva). Si $e > 1$, esta ecuación define una hipérbola; si $e = 1$, define una parábola; y si $e < 1$, define una elipse. Para la elipse, el caso especial $e = 0$ resulta en un círculo de radio r.

Números complejos

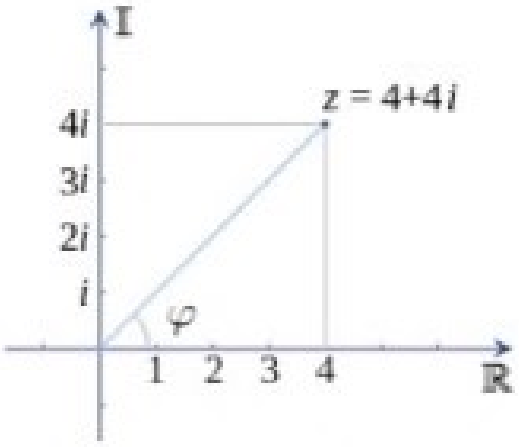


Ilustración de un número complejo z en el plano complejo.

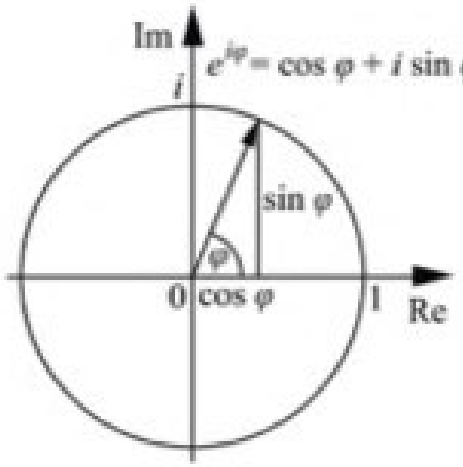


Ilustración de un número complejo en el plano complejo usando la fórmula de Euler.

Cada número complejo se puede representar como un punto en el plano complejo, y se puede expresar, por tanto, como un punto en coordenadas cartesianas o en coordenadas polares. El número complejo z se puede representar en forma rectangular como

$$z = x + iy$$

donde i es la unidad imaginaria. De forma alternativa, se puede escribir en forma polar (mediante las fórmulas de conversión dadas arriba) como

$$z = re^{i\varphi}$$

donde e es la constante de Neper. Esta expresión es equivalente a la mostrada en la fórmula de Euler. (Nótese que, en esta fórmula, al igual que en todas aquellas en las que intervienen exponenciales de ángulos, se asume que el ángulo θ está expresado en radianes.) Para pasar de la forma polar a la forma rectangular de un número complejo dado se pueden usar las fórmulas de conversión vistas anteriormente.

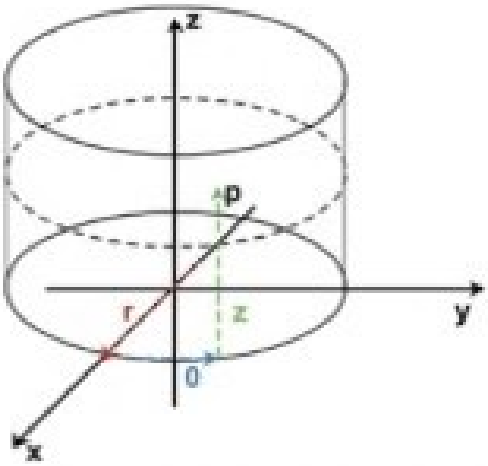
Para las operaciones de multiplicación, división y exponenciación de números complejos, es normalmente mucho más simple trabajar con números complejos expresados en forma polar que con su equivalente en forma rectangular.

Extensión a más de dos dimensiones

Tres dimensiones

El sistema de coordenadas polares puede extenderse a tres dimensiones con dos sistemas de coordenadas diferentes: el sistema de coordenadas cilíndricas y el sistema de coordenadas esféricas. El sistema de coordenadas cilíndricas añade una coordenada de distancia, mientras que el sistema de coordenadas esféricas añade una coordenada angular.

Coordenadas cilíndricas



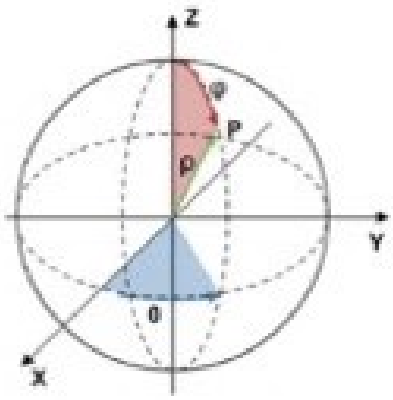
Un punto representado en coordenadas cilíndricas

El *sistema de coordenadas cilíndricas* es un sistema de coordenadas que extiende al sistema de coordenadas polares añadiendo una tercera coordenada que mide la altura de un punto sobre el plano, de la misma forma que el sistema de coordenadas cartesianas se extiende a tres dimensiones. La tercera coordenada se suele representar por h, haciendo que la notación de dichas coordenadas sea (r, θ, h).

Las coordenadas cilíndricas pueden convertirse en coordenadas cartesianas de la siguiente manera:

$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \operatorname{sen} \theta$$
$$z = h.$$

Coordenadas esféricas



Un punto representado en coordenadas esféricas.

Las coordenadas polares también pueden extenderse a tres dimensiones usando las coordenadas (ρ, φ, θ), donde ρ es la distancia al origen (siempre positivo variando desde cero hasta infinito), φ es el ángulo con respecto al eje z (medido de 0º a 180º), y θ es el ángulo con respecto al eje x (igual que en las coordenadas polares, entre 0º y 360º). Este

sistema de coordenadas es similar al sistema utilizado para denotar la altitud y la latitud de un punto en la superficie de la Tierra, donde se sitúa el origen en el centro de la Tierra. La latitud **δ** es el ángulo complementario de **φ** (es decir, δ= 90°−φ), y la longitud *l* viene dada por θ−180°.

Las coordenadas esféricas pueden convertirse en coordenadas cartesianas de la siguiente manera:

φ = r Senj Cosq
ρ = r Senj Senq
θ = r Cosj

La mayoría de los físicos, ingenieros y matemáticos escriben:

- q, el azimut: de 0° a 360°
- j, la colatitud: de 0° a 180°

Esta es la convención para seguir.

Las coordenadas polares en el espacio tienen especial interés cuando los ángulos dererminan la función, como en el caso de la hélice.

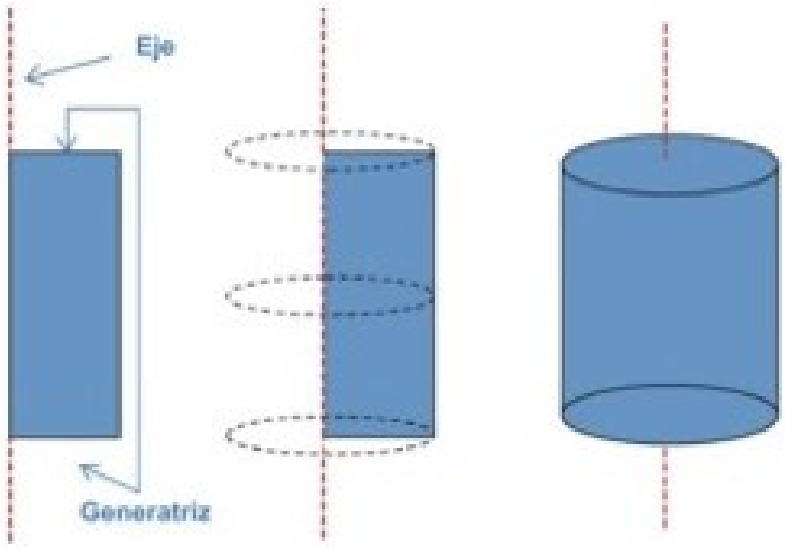
Desafío: Establecer la relación entre las coordenadas esféricas y las coordenadas cilíndricas y sus inversas.

Aplicaciones

Las coordenadas polares son bidimensionales, por lo que solamente se pueden usar donde las posiciones de los puntos se sitúen en un plano bidimensional.

Son las más adecuadas en cualquier contexto donde el fenómeno a considerar esté directamente ligado con la dirección y longitud de un punto central, como en las figuras de revolución, en los movimientos giratorios, en las observaciones estelares, etc.

Un cuerpo de revolución es aquel que se origina al girar una figura plana alrededor de un eje. Las caras de un cuerpo de revolución son curvas.



Podemos distinguir:

Eje: recta alrededor de la cual gira la figura plana para generar el cuerpo de revolución.

Generatriz: son los límites exteriores de la figura plana.

Entre los cuerpos de revolución se destacan: la esfera, el cilindro y el cono.

Los ejemplos vistos anteriormente muestran la facilidad con la que las coordenadas polares definen curvas como la espiral de Arquímedes, cuya ecuación en coordenadas cartesianas sería mucho más intrincada.

Además, muchos sistemas físicos, tales como los relacionados con cuerpos que se mueven alrededor de un punto central, o los fenómenos originados desde un punto central, son más simples e intuitivos de modelar usando coordenadas polares. La motivación inicial de la introducción del sistema polar fue el estudio del movimiento circular y el movimiento orbital.

Posición y navegación

Las coordenadas polares se usan a menudo en navegación, ya que el destino o la dirección del trayecto pueden venir dados por un ángulo y una distancia al objeto considerado. Las aeronaves, por ejemplo, utilizan un sistema de coordenadas polares ligeramente modificado para la navegación.

Modelado

Los sistemas de simetría radial poseen unas características adecuadas para el sistema de coordenadas polares, con el punto central actuando como polo.

Un primer ejemplo de este uso es la ecuación del flujo de las aguas subterráneas cuando se aplica a pozos radialmente simétricos. De la misma manera, los sistemas influenciados por una fuerza central son también buenos candidatos para el uso de las coordenadas polares. Algunos ejemplos son las antenas radioeléctricas, o los campos gravitatorios, que obedecen a la ley de la inversa del cuadrado.

Los sistemas radialmente asimétricos también pueden modelarse con coordenadas polares. Por ejemplo, la directividad de un micrófono, que caracteriza la sensibilidad del micrófono en función de la dirección del sonido recibido, puede representarse por curvas polares. La curva de un micrófono cardioide estándar, el más común de los micrófonos, tiene por ecuación $r = 0{,}5 + 0{,}5 \operatorname{sen} \theta$.

Coordenadas geográficas

Las coordenadas geográficas son un sistema de referencia que utiliza las dos coordenadas angulares, latitud (norte y sur) y longitud (este y oeste) y sirve para determinar los laterales de la superficie terrestre (o, en general, de un círculo o un esferoide). Estas dos coordenadas angulares medidas desde el centro de la Tierra son de un sistema de coordenadas esféricas que están alineadas con su eje de un sistema de coordenadas geográficas incluye un datum, meridiano principal y unidad angular. Estas coordenadas se suelen expresar en grados sexagesimales:

- La latitud mide el ángulo entre cualquier punto y el ecuador. Las líneas de latitud se denominan paralelos. La latitud es el ángulo que existe entre un punto cualquiera y

el Ecuador, medida sobre el meridiano que pasa por dicho punto. La distancia en km a la que equivale un grado de dichos meridianos depende de la latitud, a medida que la latitud aumenta disminuyen los kilómetros por grado. Para el paralelo del Ecuador, sabiendo que la circunferencia que corresponde al Ecuador mide 40.075,004 km, 1° equivale a 111,319 km.

- La latitud se suele expresar en grados sexagesimales.
- Todos los puntos ubicados sobre el mismo paralelo tienen la misma latitud.
- Aquellos que se encuentran al norte del Ecuador reciben la denominación norte (N).
- Aquellos que se encuentran al sur del Ecuador reciben la denominación sur (S).
- Se mide de 0° a 90°.
- Al Ecuador le corresponde la latitud 0°.
- Los polos norte y sur tienen latitud 90° N y 90° S respectivamente.
- La longitud mide el ángulo a lo largo del Ecuador desde cualquier punto de la Tierra. Se acepta que Greenwich en Londres es la longitud 0 en la mayoría de las sociedades modernas. Las líneas de longitud son círculos máximos que pasan por los polos y se llaman meridianos.

Para los meridianos, sabiendo que junto con sus correspondientes antimeridianos se forman circunferencias de 40.007,161 km de longitud, 1° de dicha circunferencia equivale a 111,131 km.

Ecuaciones de la recta en el plano

Una recta es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano tales que, tomados dos cualesquiera de ellos, el cálculo de la pendiente resulta siempre igual a una constante.

La ecuación general de la recta es de la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

cuya pendiente es $m = -A/B$ y cuya ordenada al origen es $b = -C/B$.

Una recta en el plano se representa con la función lineal de la forma:

$$y = mx + b$$

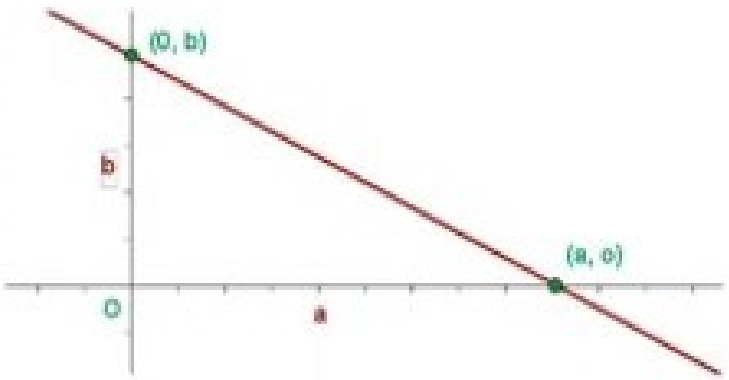
La ecuación canónica o segmentaria

Es la expresión de la recta en función de los segmentos que esta determina sobre los ejes de coordenadas.

a es la abscisa en el origen de la recta.

b es la ordenada en el origen de la recta.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



Los valores de **a** y de **b** se pueden obtener de la ecuación general.
Si y = 0 resulta x = a.
Si x = 0 resulta y = b.

Una recta carece de la forma canónica en los siguientes casos:
1 Recta paralela a OX, que tiene de ecuación y = n
2 Recta paralela a OY, que tiene de ecuación x = k
3 Recta que pasa por el origen, que tiene de ecuación y = mx.

Ejemplos

1.- Una recta determina sobre los ejes coordenados segmentos de 5 y 3 unidades, respectivamente. Hallar su ecuación.

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$$

2.- Hallar la ecuación canónica de la recta que pasa por P (-2, 1) y tiene por vector director v = (3, -4).
Hallamos la ecuación en forma continua:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-4}$$

Pasamos a la general:
$-4x - 8 = 3y - 3$; $4x + 3y + 5 = 0$
Si y = 0 $\Rightarrow$ x = -5/4 = a.
Si x = 0 $\Rightarrow$ y = -5/3 = b.

$$\frac{x}{-\frac{5}{4}} + \frac{y}{-\frac{5}{3}} = 1$$

3.- La recta r $\equiv$ x - 2y + 4 = 0 forma con los ejes un triángulo del que se pide su área.
La recta forma un triángulo rectángulo con el origen y sus catetos son la abscisa y la ordenada en el origen.
Si y = 0 $\Rightarrow$ x = **-4 = a.**
Si x = 0 $\Rightarrow$ y = **2 = b.**
La ecuación canónica es:

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1$$

El área es:

$$S = \frac{1}{2}\left|(-4) \cdot 2\right| = 4u^2$$

4.- Una recta pasa por el punto A (1,5) y determina con los ejes de coordenadas un triángulo de 18 u^2 de superficie. ¿Cuál es la ecuación de la recta?
Aplicamos la ecuación canónica:

$$\frac{1}{a} + \frac{5}{b} = 1$$

El área del triángulo es:

$$18 = \frac{1}{2}\, a \cdot b$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} b + 5a = ab \\ ab = 36 \end{cases}$$

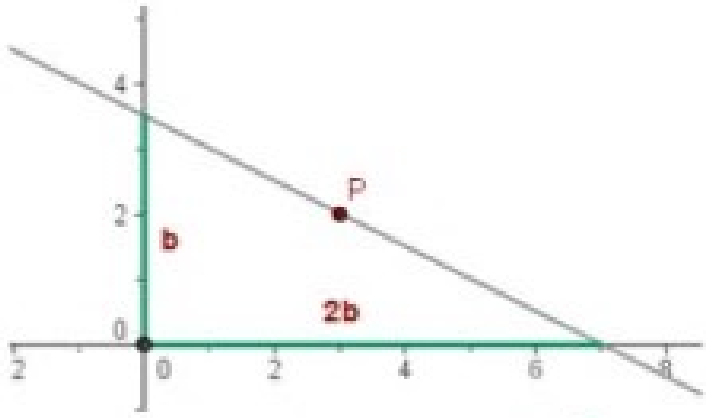
$$a = 6 \qquad b = 6$$

$$a = 6/5;\ b = 30$$

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1 \qquad x + y = 6$$

$$\frac{x}{\frac{6}{5}} + \frac{y}{30} = 1 \qquad 25 + y = 30$$

5.- Sabemos que una recta pasa por el punto A (3, 2) y que determina sobre los ejes coordenados segmentos de doble longitud en el eje de abscisas, que en el de ordenadas. Hallar la ecuación de esta recta.



$$\frac{3}{2b} + \frac{2}{b} = 1 \qquad 3 + 4 = 2b \qquad b = \frac{7}{2} \qquad a = 7$$

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{\frac{7}{2}} = 1 \qquad x + 2y - 7 = 0$$

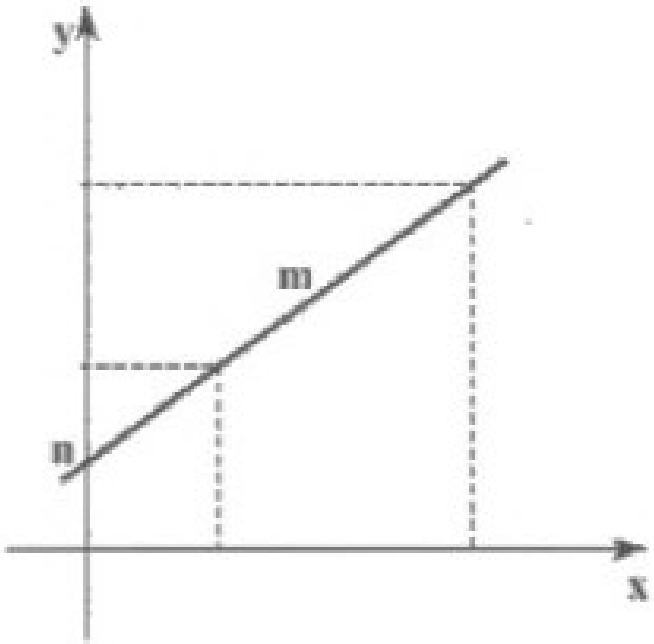
- Las rectas verticales no cortan el eje de ordenadas y son paralelas a dicho eje. El punto de corte con el eje de abscisas es el punto $(x_0, 0)$. La ecuación de dichas rectas es: $x = x_0$

- Las rectas horizontales no cortan el eje de las abscisas y, por tanto, son paralelas a dicho eje. El punto de corte con el eje de ordenadas es el punto $(0, y_0)$. La ecuación de dichas rectas es: $y = y_0$
- Cualquier otro tipo de recta recibe el nombre de recta oblicua. En ellas hay un punto de corte con el eje de abscisas $(a, 0)$ y otro punto de corte con el eje de ordenadas $(0, b)$. El valor a recibe el nombre de abscisa en el origen, mientras que el b se denomina ordenada en el origen.

Ecuación de la recta que pasa por un punto

Veamos ahora la ecuación de la recta que pasa solo por un punto conocido y cuya pendiente (de la recta) también se conoce, que se obtiene con la fórmula **y = mx + b** que considera las siguientes variables: un punto (x, y), la pendiente (m) y el punto de intercepción en la ordenada (n), y es conocida como ecuación principal de la recta.

Al representar la ecuación de la recta, aparecen dos nuevas variables: la **m** y la **b**, esto agrega a nuestra ecuación de la recta dos nuevos elementos que deben considerase al analizar o representar una recta: la pendiente y el punto de intercepción (también llamado intercepto) en el eje de las ordenadas (y).



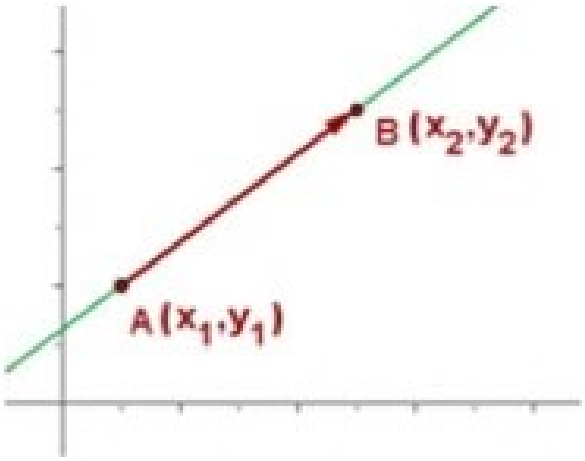
Respecto a esto, en el gráfico de la izquierda, **m** representa la pendiente de la recta y permite obtener su grado de inclinación (en relación a la horizontal o abscisa), y **n = b** es el coeficiente de posición, el número que señala el punto donde la recta interceptará al eje de las ordenadas **(y)**.

Forma simplificada de la ecuación de la recta

Si se conoce la pendiente **m** y el punto donde la recta corta al eje de ordenadas es (**0, b**) (corresponde a **n** en la fórmula principal ya vista), podemos deducir, partiendo de la ecuación de la recta de la forma:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - b = m(x - 0)$$
$$y - b = mx$$
$$y = mx + b$$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos



Sean los puntos A (x_1, y_1) y B (x_2, y_2) que determina una recta r. Un vector director de la recta es:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$$

Cuyas componentes son:

$$v_1 = x_2 - x_1$$

$$v_2 = y_2 - y_1$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Hallar la ecuación de la recta que pasa por A (1,3) y B (2,-5)

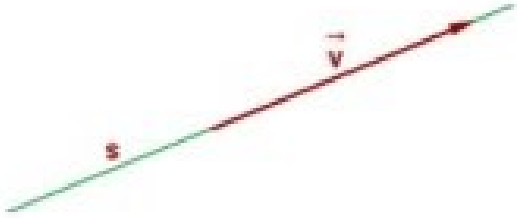
$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-3}{-5-3} \qquad -8x + 8 = y - 3$$

$$8x + y - 11 = 0$$

Rectas paralelas y perpendiculares

Rectas paralelas

Dos rectas son paralelas si tienen el mismo vector director o la misma pendiente.



$$\vec{u} = \vec{v}$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{v_1}{v_2} \qquad \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$$

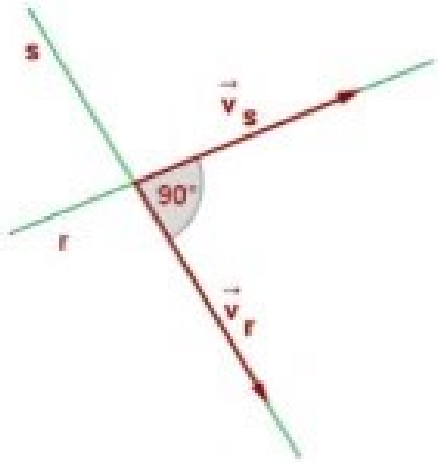
$$m_r = m_s$$

$$r \equiv Ax + By + C = 0$$

$r \parallel s$ $\qquad$ $\vec{v}_r = \vec{v}_s = (-B, A)$

$$s \equiv Ax + By - k = 0 \qquad k \in \mathbb{R}$$

Rectas perpendiculares



Si dos rectas son perpendiculares tienen sus pendientes inversas y cambiadas de signo.

$$m_s = -\frac{1}{m_r}$$

Dos rectas son perpendiculares si sus vectores directores son perpendiculares.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0$$

$$r \equiv Ax + By + C = 0 \qquad \vec{v}_r = (-B, A)$$

$r \perp s$

$$s \equiv -Bx + Ay + k = 0 \quad k \in \mathbb{R} \qquad \vec{v}_s = (A, B)$$

Ejemplos

1.- Hallar una recta paralela y otra perpendicular a $r \equiv x + 2y + 3 = 0$, que pasen por el punto A (3,5).

$$m_r \parallel m_s$$

$$m_r = m_s = -\frac{1}{2}$$

$$y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 3) \qquad 2y - 10 = -x + 3$$

$$x + 2y - 13 = 0$$

$$m_r \perp m_s$$

$$m_r = -\frac{1}{2} \qquad m_s = 2$$

$$y - 5 = 2 \cdot (x - 3)$$

$$2x - y - 1 = 0$$

2.- Calcula **k** para que las **rectas** $r \equiv x + 2y - 3 = 0$ y $s \equiv x - ky + 4 = 0$, sean paralelas y perpendiculares.

$$m_r = -\frac{1}{2} \qquad m_s = \frac{1}{k}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{k}$$

$r \parallel s$ $\qquad -\frac{1}{2} = \frac{1}{-\frac{1}{k}} \qquad k = -2$

$r \perp s$ $\qquad \frac{1}{2} = k$

Distancia entre dos puntos

Otra de las utilidades de dominar los conceptos sobre el plano cartesiano radica en que, a partir de la ubicación de las coordenadas de dos puntos, es posible calcular la distancia entre ellos.

Cuando los puntos se encuentran ubicados sobre el eje **x** (de las abscisas) o en una recta paralela a este eje, la distancia entre los puntos corresponde al valor absoluto de la diferencia de sus abscisas $(x_2 - x_1)$.

Cuando los puntos se encuentran ubicados sobre el eje **y** (de las ordenadas) o en una recta paralela a este eje, la distancia entre los puntos corresponde al valor absoluto de la diferencia de sus ordenadas $(y_2 - y_1)$.

Ahora, si los puntos se encuentran en cualquier lugar del sistema de coordenadas, la distancia queda determinada por la relación:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Para demostrar esta relación se deben ubicar los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en el sistema de coordenadas, luego formar un triángulo rectángulo de hipotenusa P_1P_2 y emplear el Teorema de Pitágoras.

Ejemplo: Calcular la distancia entre los puntos A (7,5) y B (4,1)

$$d = \sqrt{(4 - 7)^2 + (1 - 5)^2}$$

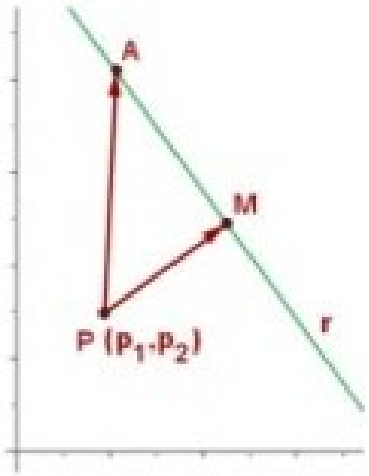
$$d = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

$$d = \sqrt{9 + 16}$$

$$d = \sqrt{25}$$

d = 5 unidades

Distancia de un punto a una recta



La distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento perpendicular a la recta, trazada desde el punto.

$$d(P, r) = |\overline{PM}|$$

$$d(P, r) = \frac{|A \cdot p_1 + B \cdot p_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo:
Calcula la distancia del punto P (2,- 1) a la recta r de ecuación 3 x + 4 y = 0.

$$d(P, r) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{5}$$

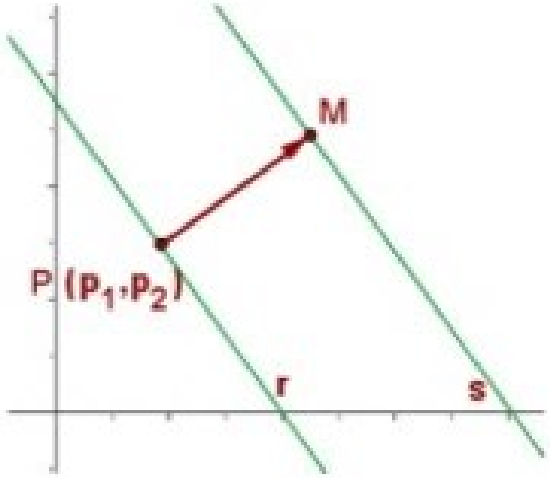
Distancia de una recta al origen de coordenadas

$$d(O, r) = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo:
Hallar la distancia al origen de la recta r ≡ 3x - 4y - 25 = 0.

$$d(O, r) = \frac{|-25|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

Distancia entre rectas paralelas



Para hallar la distancia entre dos en rectas paralelas, se toma un punto cualquiera, P, de una de ellas y calcular su distancia a la otra recta.

$$d(r,s) = d(P,s)$$

d = módulo $(A_1C_2-A_2C_1) / A_1.(A_2^2+B_2^2)^{1/2}$

Ejemplos:

1.- Hallar la distancia entre $r \equiv 3x - 4y + 4 = 0$ y $s \equiv 9x - 12y - 4 = 0$.

$$\frac{3}{-4} = \frac{9}{-12} \qquad -36 = -36 \qquad r \parallel s$$

$$3 \cdot 0 - 4y + 4 = 0 \qquad y = 1$$

$$P(0,1) \in r$$

$$d(P,s) = \frac{|9 \cdot 0 - 12 \cdot 1 - 4|}{\sqrt{9^2 + 12^2}} = \frac{16}{15}$$

2.- Hallar la distancia entre las rectas:

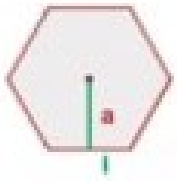
$$r = x + 3y - 5 = 0 \qquad s \equiv x + 3y + 18 = 0$$

$$d(r,s) = \frac{|18 + 5|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{23}{\sqrt{10}}$$

CÁLCULO DE ÁREAS

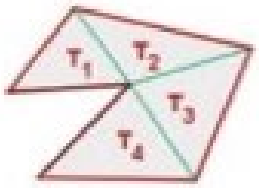
Para el cálculo de áreas poligonales se distinguen 2 casos:

1.- Si el polígono es regular se aplicará:



$$A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

2.- Si el polígono es irregular es menester la división del polígono en triángulos. El área total es la suma de las áreas parciales.



Cálculo de áreas triangulares

Método General

1. Definir una base del triángulo, determinando su medida **b** y la ecuación de la recta.
2. Determinar la recta perpendicular a la base que pasa por vértice opuesto.
3. Resolver el sistema (Coordenadas del pie de la altura).
4. Calcular la altura **h** del triángulo (distancia del pie de la altura al vértice opuesto).
5. Calcular el área con la fórmula **(bxh):2**

Método de las Áreas Compensadas

1. Inscribir el polígono en un rectángulo.
2. Calcular el área del rectángulo y de las áreas externas al triángulo.
3. Por diferencia, determinar el área solicitada.

Teorema de Pick

Georg Alexander Pick (10 de agosto de 1859 – 26 de julio de 1942) fue un matemático austríaco de ascendencia judía, víctima del holocausto nazi. Es conocido por el teorema de Pick, una elegante herramienta geométrica que permite calcular el área de polígonos con sus vértices inscritos en una retícula regular.

Biografía

Georg fue educado en casa por su propio padre. En 1875 ingresó en la Universidad de Viena y al año siguiente publicó su primer artículo sobre matemáticas, con apenas diecisiete años de edad.

Estudió matemáticas y física y se graduó en 1879 con una calificación que le permitía enseñar ambas disciplinas. Se doctoró en 1880. Después fue nombrado asistente en la Universidad de Praga, donde obtuvo la habilitación en 1881 con su trabajo *Über die Integration hyperelliptischer Differentiale durch Logarithmen*.

Salvo por los años lectivos de 1884-85, en que dio lecciones en la Universidad de Leipzig, se mantuvo en Praga el resto de su carrera académica. Fue promovido a profesor adjunto de matemáticas en 1888 y en seguida fue nombrado titular en 1892 en la Universidad Alemana de Praga.

Sus trabajos matemáticos abarcaron muchos campos en los 67 artículos que llegó a escribir: desde el álgebra lineal, el análisis funcional y el cálculo integral a la geometría, pero más de la mitad de sus artículos trataban sobre funciones de variable compleja, ecuaciones diferenciales y geometría diferencial. Términos como matrices Pick, interpolación Pick-Nevanlinna y la ley Schwarz-Pick son usados hasta hoy.

Su aporte más renombrado es el llamado teorema de Pick, que apareció en su artículo de ocho páginas, publicado en Praga en 1899. El matemático Hugo Steinhaus, que lo incluyó en su *Mathematical Snapsghots* (1969), atrajo de inmediato la atención sobre él por la elegancia y simplicidad de su contenido.

Pick fue nombrado rector de la facultad alemana de Praga en 1901. Pero hay otro aspecto de la vida de Pick que merece atención: en 1910 se hallaba en una comisión creada por la Universidad de Praga para nombrar a Albert Einstein para la cátedra de Física. Pick fue el principal impulsor de su candidatura y Einstein ocupó el cargo hasta 1913 y durante estos años los dos se volvieron amigos íntimos no sólo por comunes intereses científicos, sino por su amor por la música, ya que Pick tocaba en un cuarteto y presentó a Einstein a la Sociedad científica y musical de Praga. El grupo musical de Pick estaba constituido por cuatro profesores de universidad, incluido Camillo Körner, profesor de ingeniería mecánica.

En 1927 fue nombrado profesor emérito de la Universidad de Praga y abandonó toda actividad académica. Volvió a Viena y en 1938 retornó a Praga, el 12 de marzo, cuando las tropas alemanas se aprestaban a anexionar Austria.

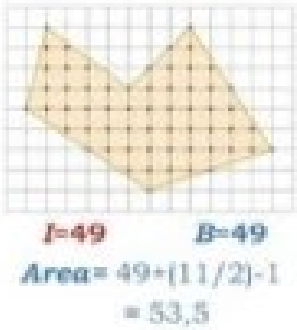
Pick fue elegido miembro de la Academia de Ciencias y Artes de la República Checa, pero los nazis lo excluyeron y enviaron al campo de concentración de Theresienstadt en Nordboehmen el 24 de noviembre de 1941. Allí, de los 144.000 judíos concentrados murieron cerca del 25% y un 60% fue enviado a Auschwitz u otros campos de concentración. Pick fue enviado a Theresienstadt el 13 de julio de 1942 y murió dos semanas más tarde a los ochenta y dos años.

Uso del teorema de Pick para calcular el área del polígono

El teorema de Pick es una fórmula que relaciona el área de un polígono simple cuyos vértices tienen coordenadas enteras (los polígonos reticulares) con el número de puntos en su interior y en su borde (frontera) que tengan también coordenadas enteras.

Un punto cuyas coordenadas sean enteras se conoce como *punto entero*. El teorema de Pick establece:

Sea un polígono simple cuyos vértices tienen coordenadas enteras. Si **B** es el número de puntos enteros en el borde, **I** el número de puntos enteros en el interior del polígono, entonces el área **A** del polígono se puede calcular con la fórmula: $\mathbf{A = I + B/2 - 1}$



Demostración

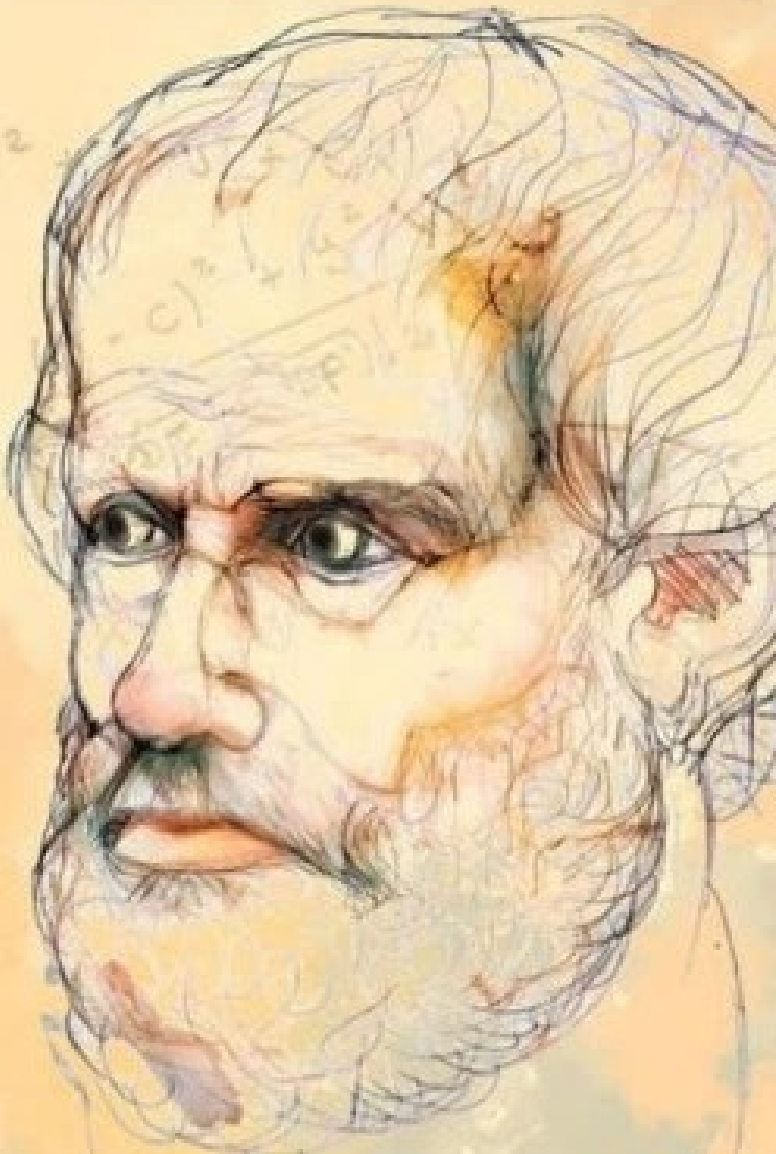
El resultado se demuestra por inducción matemática.

La fórmula también es aprovechable para polígonos con vértices racionales. Se debe hacer un cambio de escala. Considerar el mínimo común múltiplo de los denominadores y multiplicar las coordenadas por este número: se obtienen vértices enteros. Aplicar el teorema de Pick en la red asociada a esta nueva magnitud. Dividir dicha expresión por el m.c.m. al cuadrado para obtener el área en la unidad original.

Las posibilidades didácticas de este resultado son muy amplias, pero como es de esperar, no es la panacea. De hecho, la restricción sobre las coordenadas enteras de los vértices hace que no podamos calcular, por ejemplo, el área de un triángulo equilátero (en una de las coordenadas de los vértices tiene que aparecer $\sqrt{3}$).

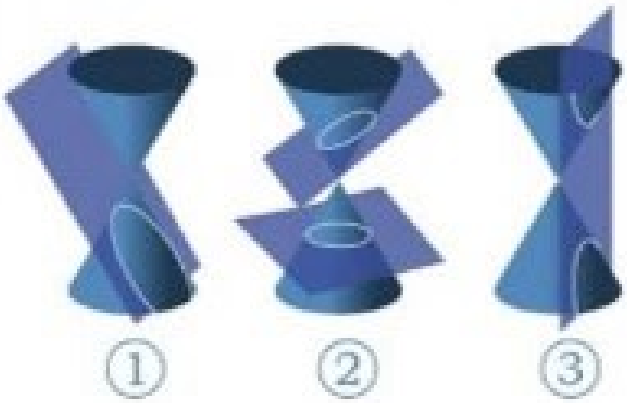
CAPÍTULO IV

SECCIONES CÓNICAS



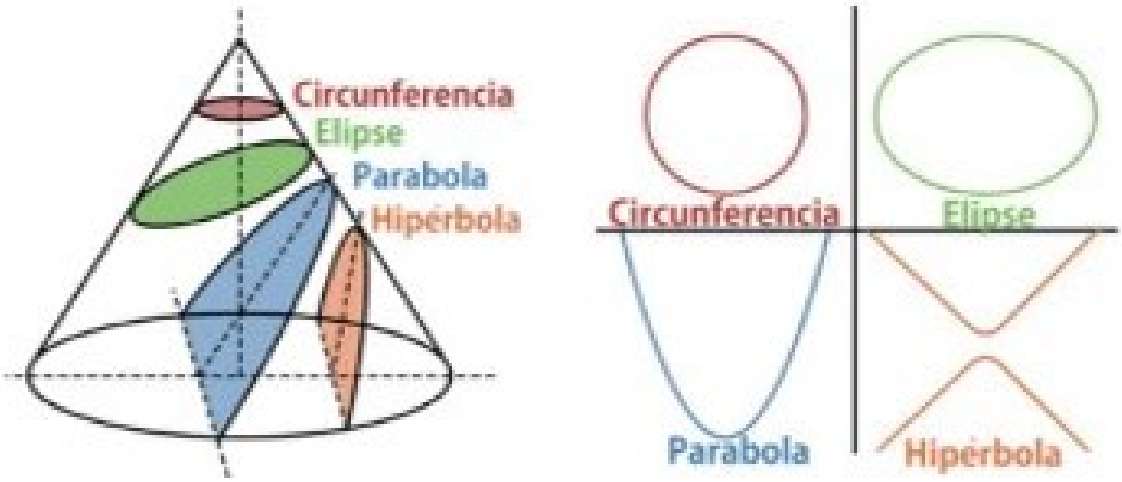
CAPÍTULO IV
SECCIONES CÓNICAS

Los cuatro ejemplos de intersección de un plano con un cono: parábola (**1**), elipse y circunferencia (**2**) e hipérbola (**3**).



Se denomina sección cónica (o simplemente cónica) a todas las curvas resultantes de las diferentes intersecciones entre un cono y un plano; si dicho plano no pasa por el vértice, se obtienen las cónicas propiamente dichas. Se clasifican en cuatro tipos: elipse, parábola, hipérbola y circunferencia.

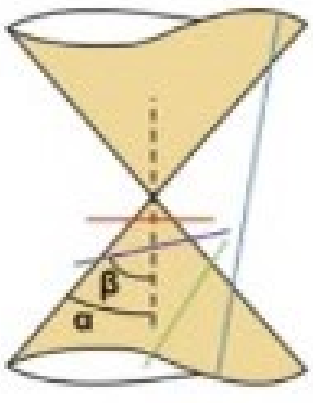
Tipos



Perspectiva de las secciones cónicas. Las cuatro secciones cónicas en el plano.

En función de la relación existente entre el ángulo de conicidad (**α**) y la inclinación del plano respecto del eje del cono (**β**), pueden obtenerse diferentes secciones cónicas, a saber:

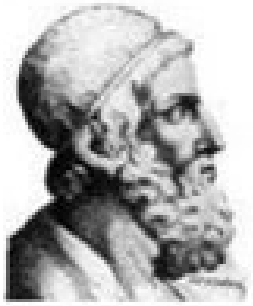
- **β < α** : Hipérbola
- **β = α** : Parábola
- **β > α** : Elipse
- **β = 90º**: Circunferencia



Si el plano pasa por el vértice del cono, se puede comprobar que:

- Cuando $\beta > \alpha$ la intersección es un único punto (el vértice).
- Cuando $\beta = \alpha$ la intersección es una recta generatriz del cono (el plano será tangente al cono).
- Cuando $\beta < \alpha$ la intersección vendrá dada por dos rectas que se cortan en el vértice.
- cuando $\beta = 90^o$ El ángulo formado por las rectas irá aumentando a medida que disminuye (α), hasta alcanzar el máximo **a** cuando el plano contenga al eje del cono.

Un poco de historia



Menecmo (380 a.C - 320 a.C) fue un matemático y geómetra griego. Nació en el primer tercio del siglo IV antes de Cristo, en Alopeconnesus (actualmente en Turquía). Fue discípulo de Platón y Eudoxo, y tutor de Alejandro Magno, como Aristóteles.

Su estudio teórico de las secciones cónicas fue célebre en la antigüedad, por eso estas curvas tuvieron el nombre de curvas de Menecmo.

Trató de resolver el problema de la duplicación del cubo, utilizando la parábola y la hipérbola.

Expresión algebraica de una cónica

En coordenadas cartesianas, las cónicas se expresan en forma algebraica mediante ecuaciones cuadráticas de dos variables (x, y) de la forma:

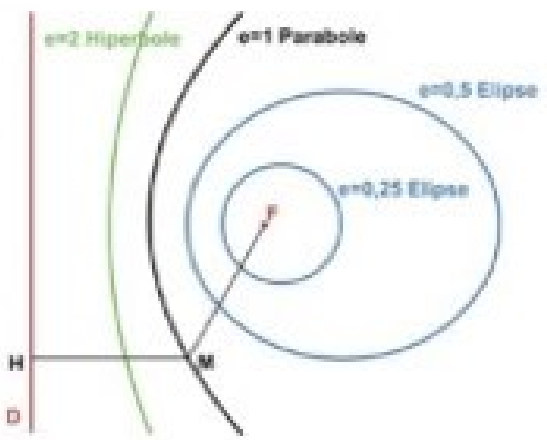
$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en la que, en función de los valores de los parámetros, se tendrá:

- **Hipérbola: Si** $A.B < 0$
- **Parábola: Si** $A.B = 0$, *además si* $A = 0$, *entonces* $B \neq 0$, *si* $B = 0$, *entonces* $A \neq 0$
- **Elipse: Si** $A.B > 0$ *con* A *distinto de* B
- **Circunferencia:** *Si* $A = B$

Definición por foco, directriz y excentricidad

La definición por foco y directriz de las cónicas es todavía llamada **definición monofocal** de estas cónicas. En la gráfica se ven cuatro cónicas teniendo el mismo foco (F) y la misma directriz D.



En un plano (p), se considera una recta (D) y un punto F no situado sobre (D). Sea *e* un número real positivo. Se llama cónica de recta directriz (D), de foco F y de excentricidad ***e***, al conjunto de los puntos M del plano, que verificando:

d(M,F) = e.d(M,D) donde **d(M,F)** es la distancia del punto M al punto F y **d(M,D)** es la distancia del punto M a la recta D.

El parámetro ***e*** define la forma de la cónica, es decir que 2 cónicas, teniendo la misma excentricidad, son imagen una de la otra por similitud.

- Si ***e*** es menor que 1, se obtiene una curva cerrada y limitada (elipse);
- Si ***e*** es igual que 1, se obtiene una curva abierta e ilimitada (parábola);
- Si ***e*** es mayor que 1, se obtiene una curva que posee 2 ramas simétricas respecto al punto de intersección de sus asíntotas comunes (hipérbola).

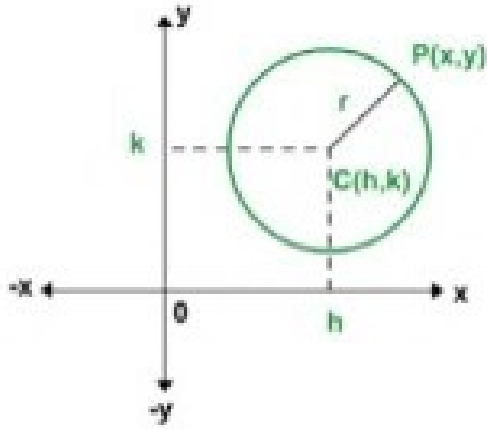
Todas estas curvas tienen como eje de simetría la recta que pasa por F y es perpendicular a (D), llamada eje principal de la cónica.

La excentricidad es el grado de deformación de la circunferencia, por lo tanto, la excentricidad de la circunferencia es 0 (cero).

Definición y ecuación de la circunferencia y la elipse

Circunferencia

Una circunferencia de centro **C** y radio **r** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a C es constante igual a r. Dicho de otro modo, todos los puntos P (x, y) de la circunferencia equidistan de un punto fijo llamado centro C (h, k).



Ecuaciones de la circunferencia

Para encontrar la "ecuación explícita" aplicamos la fórmula de distancia entre dos puntos: el centro C (h, k) y un punto P(x, y) perteneciente a la circunferencia:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ecuación explícita o canónica de la circunferencia de centro C (h, k) y radio r.

Para plantear la "ecuación general", vamos a desarrollar cuadrados:

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$

Acomodando convenientemente:

$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$

Escribimos:

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Siendo:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ecuación general o implícita de la circunferencia de centro C (h, k) y radio r,

donde $\begin{cases} \textit{Coordenadas del centro C:} & h = -\dfrac{D}{2},\ h = -\dfrac{E}{2} \\ \textit{Radio:} & r = h^2 + k^2 - F^2 \end{cases}$

*Es la ecuación general de una cónica $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$, con **A=B**, en este caso A=B=1

Determinación de una circunferencia

Podemos hallar la ecuación de una circunferencia cuando conocemos:

1. Tres puntos de ella.
2. El centro y el radio.
3. Un punto y el centro.
4. El centro y una recta tangente.

1. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto C (1,5) que pasa por el punto P (-3,2).

- el radio es la distancia de C (1,5) a P (-3,2) $r = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{25} = 5$

→ $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0$

2. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es el segmento de extremos los puntos A (2,3) y B (-4, -3).

- el centro es el punto medio de A y B, es decir,

C ((2 - 4)/2.(3 - 9)/2) => C (-1,-3)

- El radio es la distancia de C (-1, -3) al punto A (2, 3).

→ $r = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{43}$

- Ecuación:
$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 43 \rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 43$
$\rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 6y - 33 = 0$

3. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos: D (0, 0), E (0, 5) y F (3, 2).
Sustituimos en la fórmula $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ las coordenadas de los tres puntos, obtenemos tres ecuaciones, resolvemos para calcular los valeros de A, B y C.

D (0, 0) $\rightarrow 0^2 + 0^2 + A.0 + B.0 + C \rightarrow C = 0$
E (0, 5) $\rightarrow 0^2 + 5^2 + 0.A + 5B + 0 = 0 \rightarrow 5B = -25$ $B = -5$
F (3 , 2) $\rightarrow 3^2 + 2^2 + 3A + 2(-5) + 0 = 0 \rightarrow 13 + 3A = 10 \rightarrow A = -1$

Llevando los valores a la fórmula $\rightarrow x^2 + y^2 - x + 5y = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - x - 5y = 0$

4. Calcula el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$
La ecuación general de la circunferencia es $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$
Identificando coeficientes resulta: $-2a = 2 \rightarrow a = -1$ $-2b = -4 \rightarrow b = 2 \rightarrow$ centro C
radio: $a^2 + b^2 - r^2 = -4 \rightarrow (-1)^2 + 2^2 - r^2 = -4 \rightarrow r^2 = 9 \rightarrow$ radio $r = 3$

5. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro (1, 4) y que es tangente a la recta $3x + 4y - 4 = 0$.
- el radio es la distancia del punto C a la recta

$$r = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3.1 + 4.4 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

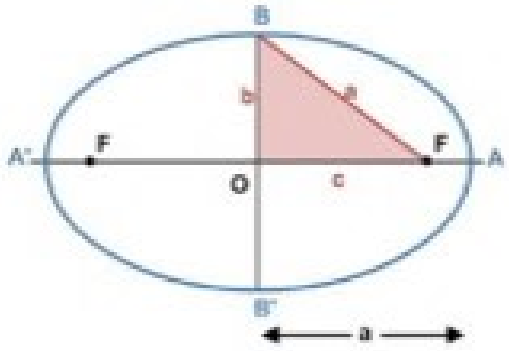
- Ecuación: $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 9 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0$.

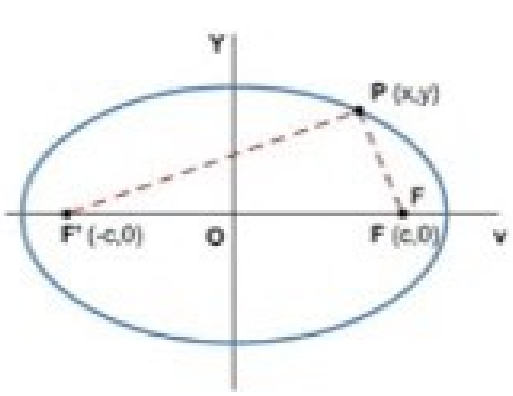
Elipse

Definición
Lugar geométrico de los puntos P del plano tales que la suma de las distancias a los focos es una cantidad constante k. $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a = k$

Elementos característicos

F y F'	focos	
O	centro de la elipse	**Constante de la elipse: $k = 2a$**
$a = \overline{OA} = \overline{OA'}$	semieje mayor	$\overline{BF} = \overline{BF'} = a$
$b = \overline{OB} = \overline{OB'}$	semieje menor	$a^2 = b^2 + c^2$
$c = \overline{OF} = \overline{OF'}$	semidistancia focal	**Excentricidad de la elipse: exc = c/a**
		$0 < exc < 1$





Ecuación de la elipse

Partimos de una elipse de centro en el origen de coordenadas C (0,0), semieje mayor horizontal a y semieje menor vertical b.

$$PF + PF' = 2a, \text{ siendo } P(x, y), F(c, 0), F'(-c, 0)$$

Reemplazando las distancias:

$$PF = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \qquad PF' = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

Tendremos:

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

Desarrollando y sacando raíces cuadradas:

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + 2a - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$$

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}\right)^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$-4a^2 - 4cx = -4a\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$$ *(Cancelamos términos y arreglamos, simplificamos la ecuación)*

$PF + PF' = 2a$, *siendo* $PP(x, y)$, $F(c, 0)$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

Desarrollando y sacando raíces cuadradas:

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$$

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right) = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}\right)$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$-4a^2 - 4cx = -4a\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$$ *(Cancelamos términos y arreglamos, simplificamos la ecuación)*

$$(a^2 + cx)^2 = \left(a\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}\right)^2$$

Desarrollamos cuadrados y arreglamos

$$a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2)$$

$$a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^4 + c^2x^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2$$

$$a^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2$$

recordemos que la relación entre $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = b^2$

$$a^2 b^2 = b^2 x^2 + a^2 y^2$$

$$1 = \frac{b^2 x^2}{a^2 b^2} + \frac{a^2 y^2}{a^2 b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Entonces: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es la ecuación implícita de una elipse horizontal de centro en el origen de coordenadas.

Si el centro de la elipse es C (h, k), la ecuación resulta:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Ecuación implícita o canónica de la elipse de centro C (h, k), semieje mayor horizontal a y semieje menor vertical b.

De la misma forma, se demuestra que la ecuación implícita de una elipse de semieje mayor vertical será:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Ecuación implícita o canónica de la elipse de centro C (h, k), semieje menor horizontal b y semieje mayor vertical a.

Desarrollando cuadrados, vamos a tener la ecuación general:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$b^2.(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = 1a^2 b^2$$

$$b^2 x^2 - 2b^2 hx + h^2 b^2 + a^2 y^2 - 2a^2 ky + a^2 k^2 - a^2 b^2 = 0$$

$$\underset{A}{b^2} x^2 + \underset{B}{a^2} y^2 - \underset{D}{2b^2 h} x - \underset{E}{2a^2 k} y + \underbrace{a^2 k^2 + b^2 h^2 - a^2 b^2}_{F} = 0$$

Escribimos:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Siendo: $A.B) 0$, $A \neq B$

Ejemplos:

1. Hallar la ecuación reducida de la elipse de eje mayor 16m y de excentricidad 1/4.

$\overline{AA'} = 2a = 16 \Rightarrow a = 8 \qquad \Rightarrow exc = c/a \Rightarrow 1/4 = c/8 \Rightarrow c = 2$

$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{64 - 4} \Rightarrow b = \sqrt{60} \Rightarrow$ ecuación: $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{60} = 1$

2. Hallar la ecuación reducida de la elipse cuya distancia focal FF'- 8m y uno de sus vértices A (5, 0).

$\overline{FF'} = 2c \Rightarrow c = \frac{8}{2} = 4\,m$

$\overline{AA'} = 2a \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow b = \sqrt{25 - 16} = 3 \Rightarrow$ ecuación: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

3. Hallar la ecuación de una elipse cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados. Sabiendo que el centro es el punto (1, 3), la distancia focal 2 5m y el semieje menor 2m.

$\overline{FF'} = 2c \Rightarrow 2c = 2\sqrt{5} \Rightarrow c = \sqrt{5} \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{9} = 3$

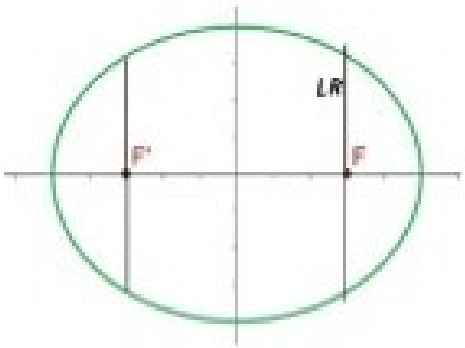
ecuación: $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1 \Rightarrow 4 \cdot (x^2 - 2x + 1) + 9 \cdot (y^2 - 6y + 9) = 36$

$4x^2 - 8x + 4 + 9y^2 - 54y + 81 = 36 \Rightarrow 4x^2 + 9y^2 - 8x - 54y + 49 = 0$

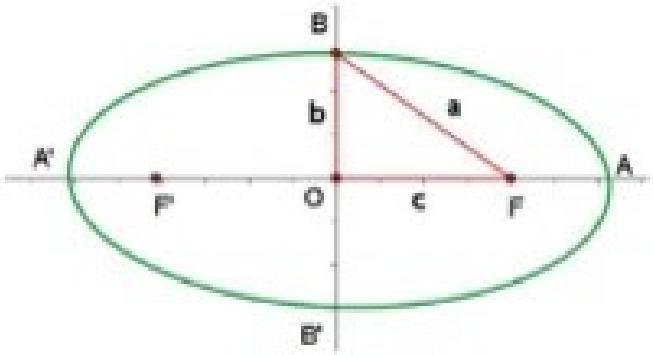
Descripción de los elementos de la elipse

1.-Focos: Son los puntos fijos **F** y **F'**.
2.-Eje focal: Es la recta que pasa por los focos.
3.-Eje secundario: Es la mediatriz del segmento **FF'**.
4.-Centro: Es el punto de intersección de los ejes.
5.-Radios vectores: Son los segmentos que van desde un punto de la elipse a los focos: **PF** y **PF'**.
6.-Distancia focal: Es el segmento $\overline{FF'}$ de longitud **2c**, **c** es el valor de la semi-distancia focal.
7.-Vértices: Son los puntos de intersección de la elipse con los ejes: **A**, **A'**, **B** y **B'**.
8.-Eje mayor: Es el segmento $\overline{AA'}$ de longitud **2a**, **a** es el valor del semieje mayor.
9.-Eje menor: Es el segmento $\overline{BB'}$ de longitud **2b**, **b** es el valor del semieje menor.
10.-Ejes de simetría: Son las rectas que contienen al eje mayor o al eje menor.
11.-Centro de simetría: Coincide con el centro de la elipse, que es el punto de intersección de los ejes de simetría.
12.- Lado recto es el segmento perpendicular al eje mayor, que pasa por el foco y tiene por extremos los puntos de intersección con la elipse. Se calcula igual a: $\mathbf{LR = 2b^2/a}$

13.- Superficie de la elipse: Sup= π. a.b (π=3,14…número irracional *pi*)



Relación entre la distancia focal y los semiejes de la elipse



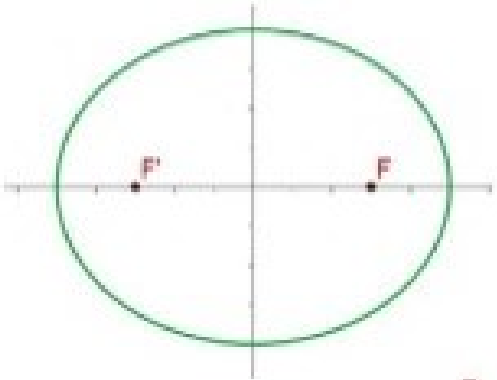
$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$b^2 = a^2 - c^2$$
$$c^2 = a^2 - c^2$$

La excentricidad de la elipse es igual al cociente entre su semidistancia focal y su semieje mayor.

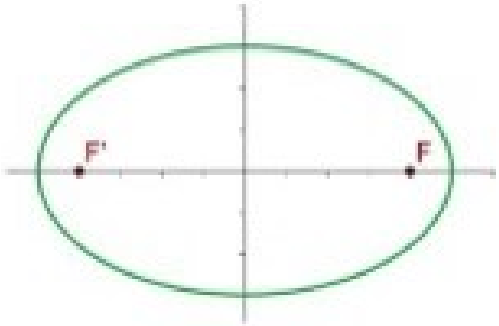
$$e = \frac{c}{a} \qquad c < a \qquad 0 < e < 1$$

Si c = 0; b = a; e = 0 entonces Circunferencia

Ejemplos de gráfica según la excentricidad:



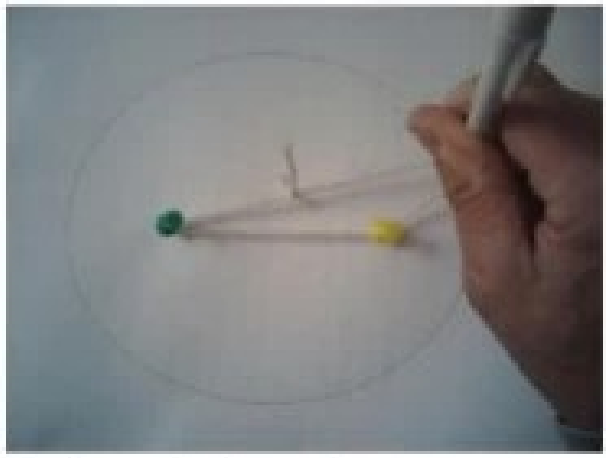
$$e = \frac{3}{5}$$



$$e = \frac{4}{5}$$

Dibujo y construcción de la elipse

- Elipse del jardinero:



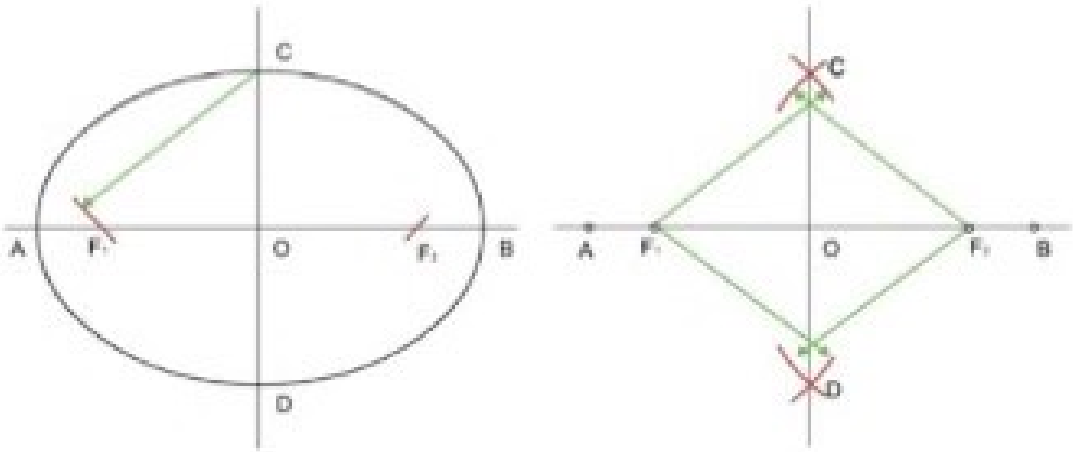
Modo de dibujar la elipse conocida como "elipse del jardinero", mediante dos puntos fijos y una cuerda.

El método se basa en la definición más corriente de la elipse, como lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los focos es constante. Los clavos o las chinchetas se colocan en el lugar de los focos, y la cuerda debe medir lo mismo que el eje mayor (2a). En el ejemplo de la foto al lazo de cuerda se le debe añadir la distancia de los focos. Con la cuerda tensa se mueve el lápiz o material de dibujo rodeando por completo los dos focos.

Se denomina "del jardinero" a este método porque sirve para trazar en el suelo elipses de gran tamaño y precisión suficiente, con medios modestos. Ver en la sección siguiente el modo de determinar los focos a partir de los ejes.

- Modo de determinar los focos:

El modo de determinar los focos a partir de los ejes, o un eje a partir de otro y los focos, se basa en la definición. Dibujados los dos ejes principales, se toma con el compás la medida a de la mitad del eje mayor. Haciendo centro en un extremo del eje menor, el compás cruza por el eje mayor en los focos.



Dado el eje mayor con los focos, la medida *a* aplicada a cada foco nos da arcos que se cruzan en los extremos del eje menor.

Dado un eje menor y la distancia de los focos, primero debemos hallar la recta sobre la que está el eje mayor, luego dibujar los focos a la distancia dada, y desde ellos tomar la distancia a los extremos del eje menor, que es la mitad del eje mayor.

- Método de radios vectores:

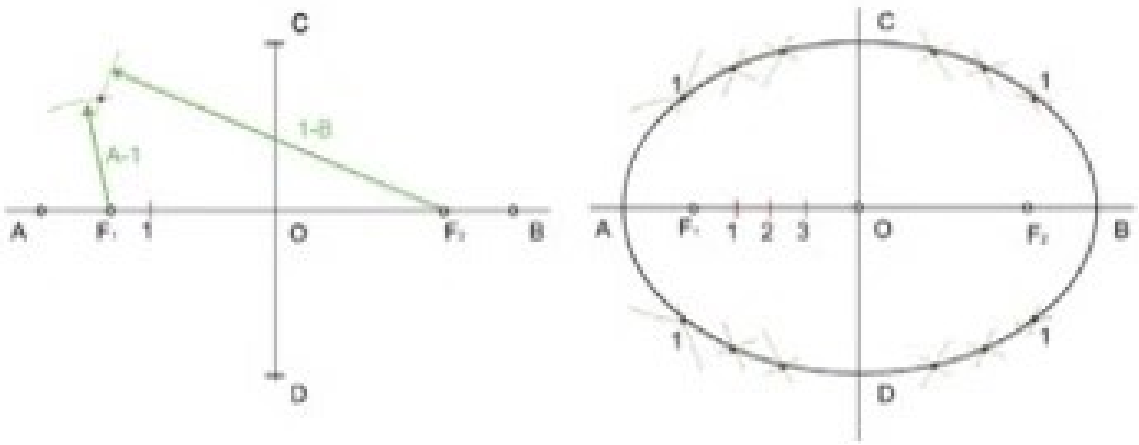
También denominado "por puntos", con este método dibujamos un número suficiente de puntos mediante el compás. Como en el método tradicional visto antes, usamos los

radios vectores y la propiedad de que la suma de los radios vectores de un punto es igual a la medida del eje mayor.

Dados dos ejes principales y determinados los focos, se toman puntos al azar sobre el eje mayor entre el centro O y uno de los focos. Generalmente tres o cuatro y preferiblemente cerca del foco por comodidad del dibujo.

Tomamos con el compás la distancia de un extremo del eje mayor (A) a cada uno de los puntos del eje (1). Haciendo centro en cada foco trazamos arcos con esa medida. A continuación, tomamos el resto de la medida del eje mayor, desde el punto (1) al otro extremo (B), y con esa medida, haciendo centro de nuevo en los focos, cruzamos los arcos trazados antes. Las cruces nos dan puntos que pertenecen a la elipse.

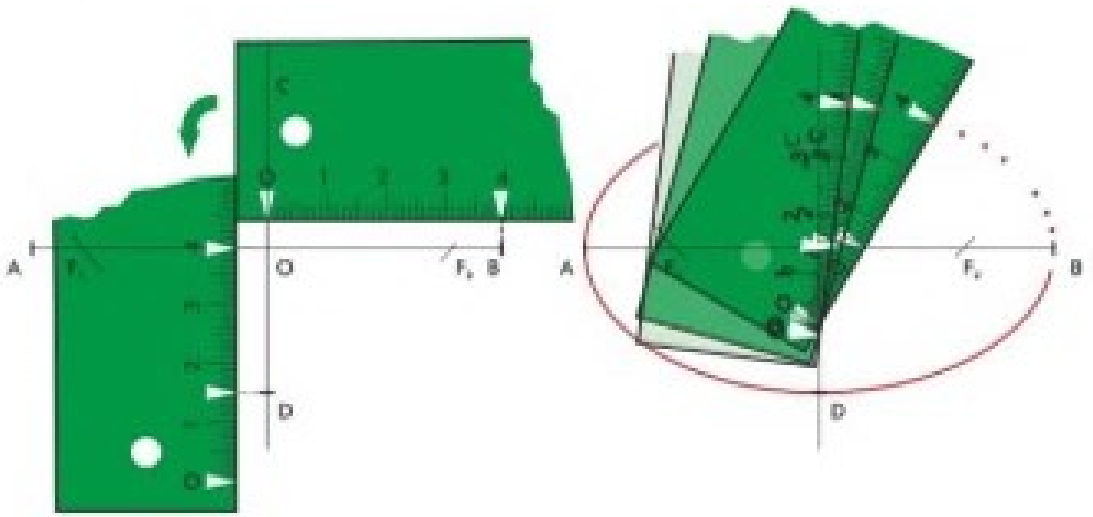
Repitiendo la operación tantas veces como sea necesario obtenemos puntos de la elipse. Se completa el dibujo a mano o mediante plantillas de curvas.



- Método de la tarjeta, compás de Arquímedes:

Se puede dibujar la elipse mediante una regla de medir, un juego de escuadra y cartabón y un lápiz.

1. Dibujamos los ejes principales con sus medidas y determinamos los focos.
2. Tomamos con la regla graduada, desde el 0, la distancia del centro al extremo del eje mayor, y después desde la marca del extremo del eje mayor, restamos la mitad del eje menor (ver dibujo).
3. Apoyando el 0 de la regla en cualquier punto del eje menor y la diferencia calculada en el eje mayor, marcamos la medida del eje mayor. Para más claridad véase el dibujo.



Esta misma operación se puede hacer con una tarjeta (de ahí su nombre tradicional, haciendo marcas en el borde con las medidas dadas.

Para construirla con reglas y compás marcamos puntos arbitrarios en el eje menor. Tomando con el compás la medida de la mitad de la diferencia entre el eje mayor y el menor, hacemos centro en los puntos y señalamos puntos correspondientes en el eje mayor, a ambos lados.

Dibujamos rectas desde los puntos del eje menor a sus correspondientes del eje mayor, prolongándolas. Sobre esas rectas, con el compás y desde cada punto del eje mayor, tomamos la medida de la mitad del eje menor, marcándola sobre la línea, lo que nos da los puntos de la elipse.

Existe una máquina sencilla (un elipsógrafo), hecha a base de guías o raíles y barras y llamada compás de Arquímedes que se basa en este principio.

Definición y ecuación de la parábola

Historia

La tradición indica que las secciones cónicas fueron descubiertas por Menecmo en su estudio del problema de la *duplicación del cubo*, donde demuestra la existencia de una solución mediante el corte de una parábola con una hipérbola, lo cual es confirmado posteriormente por Proclo y Eratóstenes.

Sin embargo, el primero en usar el término "parábola" fue Apolonio de Perge en su tratado *Cónicas*, considerada obra cumbre sobre el tema de las matemáticas griegas, donde se desarrolla el estudio de las tangentes a secciones cónicas.

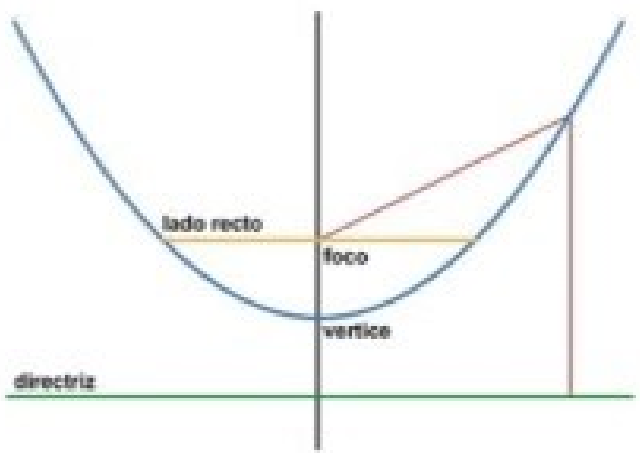
En matemáticas, una parábola (del griego **παραβολή**) es la sección cónica resultante de cortar un cono recto con un plano cuyo ángulo de inclinación respecto al eje de revolución del cono sea igual al presentado por su generatriz.

La parábola aparece en muchas ramas de las ciencias aplicadas debido a que su forma se corresponde con las gráficas de las ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, son parábolas las trayectorias ideales de los cuerpos que se mueven bajo la influencia exclusiva de la gravedad (ver movimiento parabólico y trayectoria balística).

Definición

La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco F, y de una recta llamada directriz d.

$$d(F,P) = d(P,d)$$



Definición de los elementos de la parábola

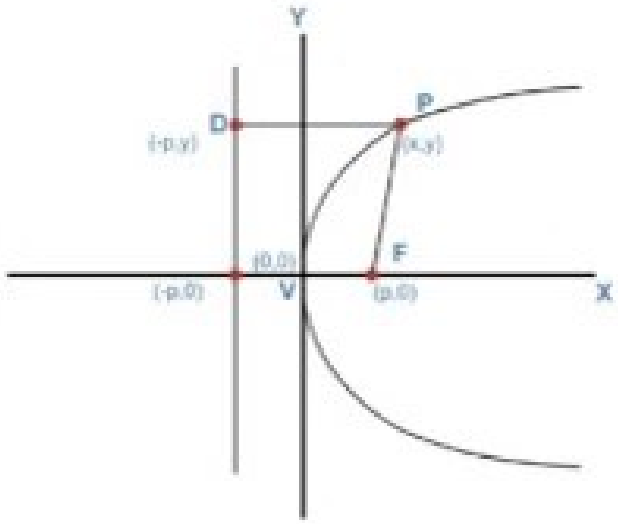
1.- Foco: Es el punto fijo **F**.
2.- Directriz: Es la recta fija **d**.
3.- Parámetro: Es la distancia del foco al vértice, y del vértice a la directriz. Se designa por la letra **p**.
4.-Eje: Es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco.
5.-Vértice: Es el punto de intersección de la parábola con su eje.
6.-Radio vector: Es un segmento que une un punto cualquiera de la parábola con el foco.
7.- Distancia de F a d, **2p**.
8.- Lado Recto: En una parábola, el lado recto es igual a: **LR = 4p.** El lado recto mide 4 veces la distancia focal. Es el segmento de recta comprendido por la parábola, que pasa por el foco y es paralelo a la directriz.

Ecuación de la parábola

Primeramente estudiaremos la **ecuación de la parábola** para los casos en que su vértice esté en el origen **(0, 0)**, y según esto, tenemos cuatro posibilidades de ecuación y cada una es característica.

Para iniciar la explicación, empezaremos con la parábola cuyo vértice está en el origen, su eje focal o de simetría coincide con el eje de las X (abscisas) y que está orientada (se abre) hacia la derecha.

Por definición, sabemos que, en una parábola la distancia entre un **punto "P"** (no confundir con el **"parámetro p"**), cualquiera de coordenadas (x, y), y el foco "F" será igual a la distancia entre la directriz (D) y dicho punto, como vemos en la figura:



De la definición anterior resulta:

$$\overline{PD} = \overline{PF}$$ (Trazo PD igual al trazo PF)

El trazo PD nace en el **punto P (x, y)** y termina en el **punto D (–p, y)** y podemos usar la fórmula para calcular **distancia entre dos puntos**:

$$PD = \sqrt{(x-(-p))^2+(y-y)^2} = \sqrt{(x+p)^2}$$

El trazo PF nace en el **punto P(x, y)** y termina en el **punto F (p, 0)**, y también podemos usar la fórmula para calcular la distancia entre ellos:

$$PF = \sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-p)^2+y^2}$$

Sustituyendo en la expresión de distancias

$$\overline{PD} = \overline{PF}$$

Elevando ambos miembros de la ecuación al cuadrado y desarrollando, se tiene:

$$\left(\sqrt{(x+p)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-p)^2+y^2}\right)^2$$
$$x^2+2px+p^2 = x^2-2px+p^2+y^2$$
$$x^2+2px+p^2-x^2+2px-p^2 = y^2$$

Simplificando términos semejantes y reordenando la expresión, se obtiene:

$$y^2 = 4px$$

Que es la ecuación explícita de la parábola horizontal con vértice en el origen de coordenadas y mira hacia la derecha.

Si el vértice de la parábola se desplaza a V (h, k), tendremos:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Ecuación explícita o canónica de la parábola de vértice V (h, k).

De la misma manera demostramos:

Parábola de V (h, k) que mira a la izquierda:

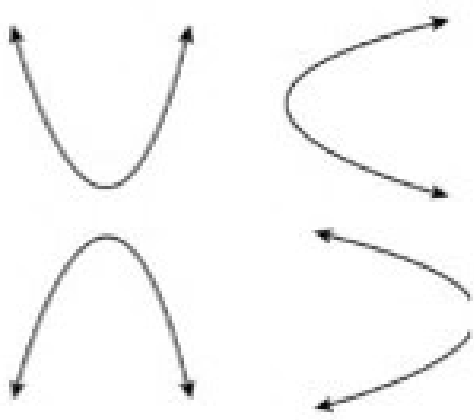
$$(y-k)^2 = (-)4p(x-h)$$

Parábola de V (h, k) que mira para arriba:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Parábola de V (h, k) que mira a la izquierda:

$$(x-h)^2 = (-)4p(y-k)$$



Para hallar la ecuación general o implícita, desarrollamos cuadrados, desde la explícita:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

$$y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4ph, \textit{ ordenamos}$$

$$\underset{B}{1}\,y^2 - \underset{D}{4p}\,x - \underset{E}{2k}y + \underbrace{k^2 + 4ph}_{F} = 0$$

Y tendremos: $By^2 + Dx + Ey + F = 0$

$$By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ecuación general o implícita de la parábola de vértice V (h, k) y eje de simetría horizontal.

De la misma manera, podemos demostrar que:

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ecuación general o implícita de la parábola de vértice V (h, k) y eje de simetría vertical.

Observemos que estas ecuaciones corresponden a la ecuación general de la cónica $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$, con las siguientes condiciones:

$$A.B = 0$$

$$Si\ A = 0 \Rightarrow B \neq 0$$

$$Si\ B = 0 \Rightarrow A \neq 0$$

Desafío

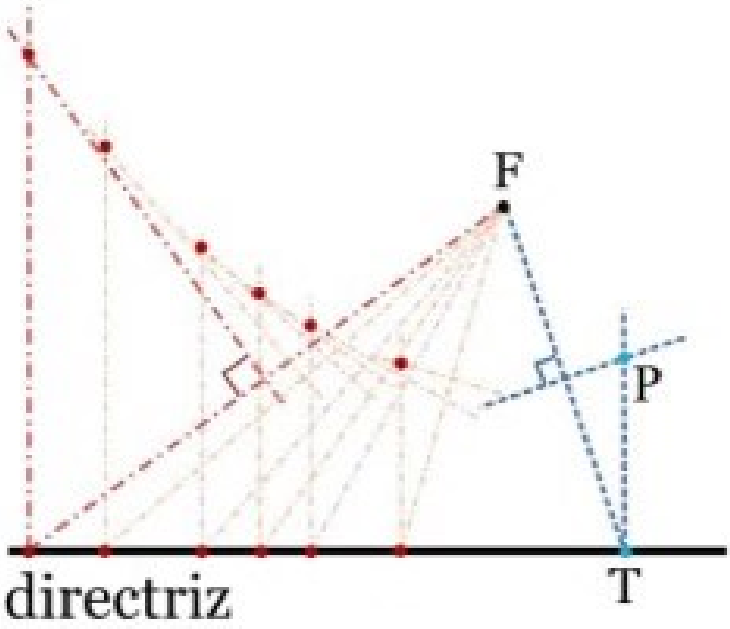
Interpretar la siguiente definición:

Si un cono es cortado por un plano a través de su eje, y también es cortado por otro plano que corte la base del cono en una línea recta perpendicular a la base del triángulo axial, y si adicionalmente el diámetro de la sección es paralelo a un lado del triángulo axial, entonces cualquier línea recta que se dibuje desde la sección de un cono a su diámetro paralelo a la sección común del plano cortante y una de las bases del cono, será igual en cuadrado al rectángulo contenido por la línea recta cortada por ella en el diámetro que inicia del vértice de la sección y por otra línea recta que está en razón a la línea recta entre el ángulo del cono y el vértice de la sección que el cuadrado en la

base del triángulo axial tiene al rectángulo contenido por los dos lados restantes del triángulo. Y tal sección será llamada una parábola.

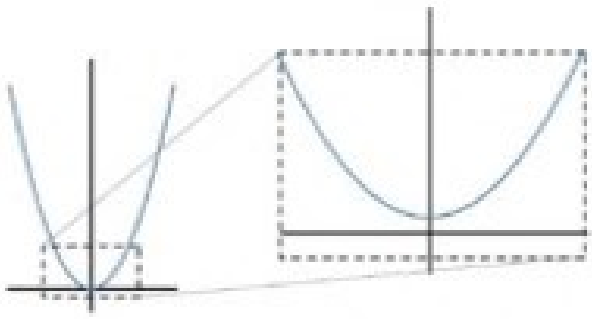
Dibujo y construcción de la parábola

De esta forma, una vez fija una recta y un punto se puede construir una parábola que los tenga por foco y directriz de acuerdo con la siguiente construcción. Sea T un punto cualquiera de la recta directriz, se une con el foco dado F y a continuación se traza la mediatriz (o perpendicular por el punto medio) del segmento TF. La intersección de la mediatriz con la perpendicular por T a la directriz da como resultado un punto P que pertenece a la parábola. Repitiendo el proceso para diferentes puntos T se puede aproximar tantos puntos de la parábola como sea necesario.



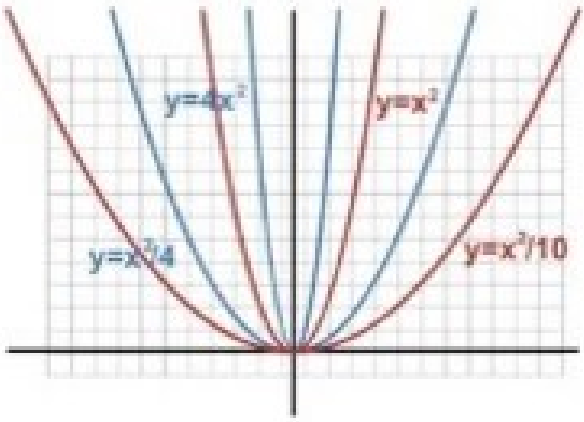
De la construcción anterior se puede probar que la parábola es simétrica respecto a la línea perpendicular a la directriz y que pasa por el foco. Al punto de intersección de la parábola con tal línea (conocida como eje de la parábola) se lo conoce como vértice de la parábola y es el punto cuya distancia a la directriz es mínima. La distancia entre el vértice y el foco se conoce como *distancia focal* o *radio focal*.

Semejanza de todas las parábolas



Todas las parábolas son semejantes, es únicamente la escala la que crea la apariencia de que tienen formas diferentes.

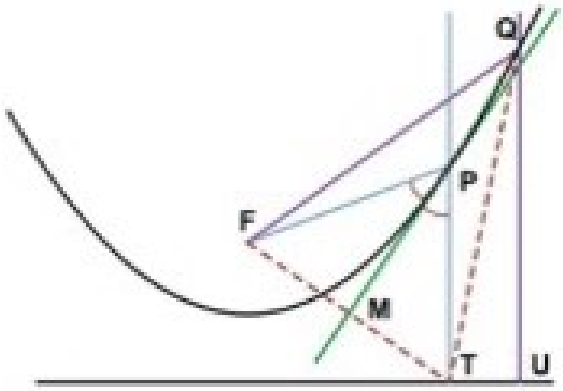
Ejemplo:



Parábolas tipo $y = ax^2$, con $a = 4, 1, {}^1/_4$ y ${}^1/_{10}$.

Dado que la parábola es una sección cónica, también puede describirse como la única sección cónica que tiene excentricidad $e = 1$. La unicidad se refiere a que todas las parábolas son semejantes, es decir, tienen la misma forma, salvo su escala.

Tangentes a la parábola



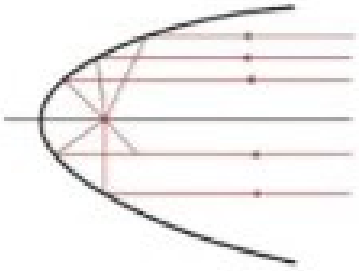
La tangente biseca el ángulo entre el foco, el punto de tangencia y su proyección.

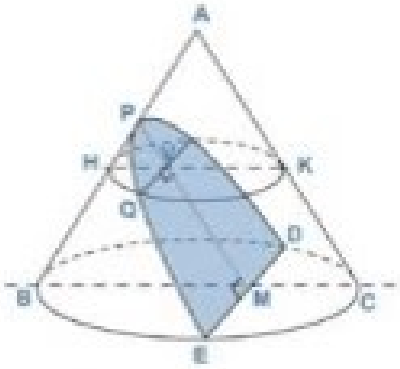
Aplicaciones prácticas

Una consecuencia de gran importancia es que la tangente refleja los rayos paralelos al eje de la parábola en dirección al foco. Las aplicaciones prácticas son muchas: las antenas satelitales y radiotelescopios aprovechan el principio concentrando señales recibidas desde un emisor lejano en un receptor colocado en la posición del foco.

La concentración de la radiación solar en un punto, mediante un reflector parabólico, tiene su aplicación en pequeñas cocinas solares y grandes centrales captadoras de energía solar.

Análogamente, una fuente emisora situada en el foco enviará un haz de rayos paralelos al eje: diversas lámparas y faros tienen espejos con superficies parabólicas reflectantes para poder enviar haces de luz paralelos emanados de una fuente en posición focal. Los rayos convergen o divergen si el emisor se desplaza de la posición focal.





Prueba geométrica de la relación $y = ax^2$.

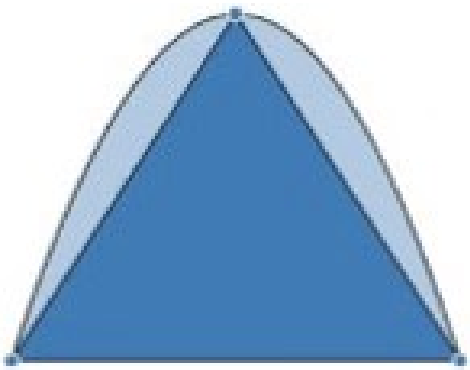
Con el advenimiento de la geometría analítica se inició un estudio de las formas geométricas basado en ecuaciones y coordenadas.

Segmento parabólico

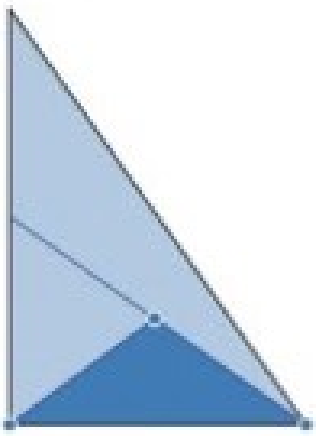
Entre los más famosos resultados de Arquímedes están el cálculo del volumen y de la superficie esférica y el área del segmento parabólico. En su trabajo *El método*, escribió sobre el "método mecánico" basado en la ley de la palanca. En él muestra el procedimiento que presumiblemente usó para obtener muchas de sus conclusiones en problemas sobre áreas y volúmenes. Dándose cuenta de que es muy ventajoso tener una noción preliminar del resultado antes de llevar a cabo la demostración geométrica deductiva, Arquímedes empleó para este propósito, junto con su ley de la palanca, la idea de una superficie formada por líneas.

Aquí se muestra cómo Arquímedes descubrió el área de un segmento parabólico.

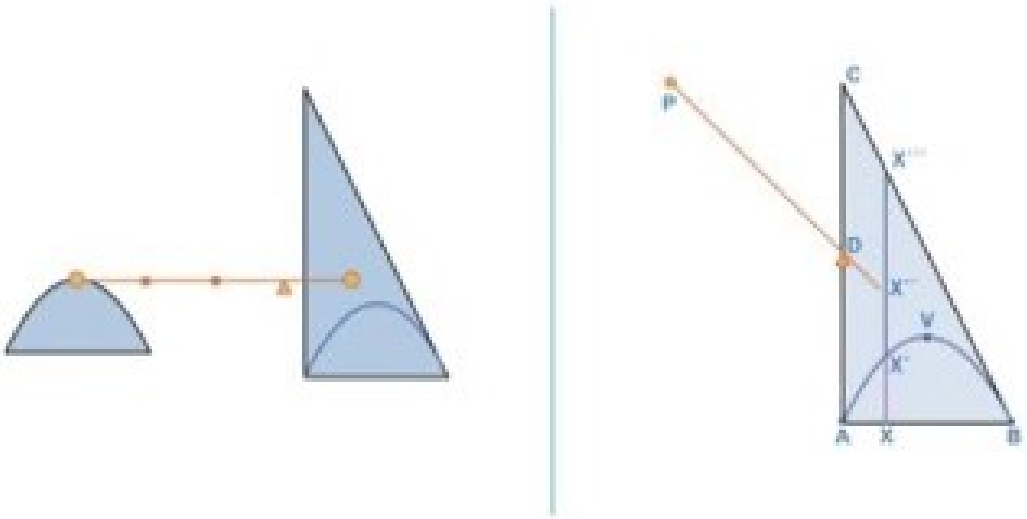
El área de un segmento parabólico es **4/3 el área del triángulo** que tiene la misma base y vértice.



Consideró un segundo triángulo usando una tangente. Este triángulo es 4 veces el primero. Y el área de este segundo triángulo resulta ser 1/3 el área del segmento parabólico.



El segmento parabólico y este segundo triángulo estarán en equilibrio, pero uno de los brazos de la balanza será tres veces más largo:



"V es el vértice de la parábola, BC es tangente en B, BD = DP, y X es cualquier punto en AB, sabemos por las propiedades de la parábola que para cualquier posición de X tenemos la proporción".

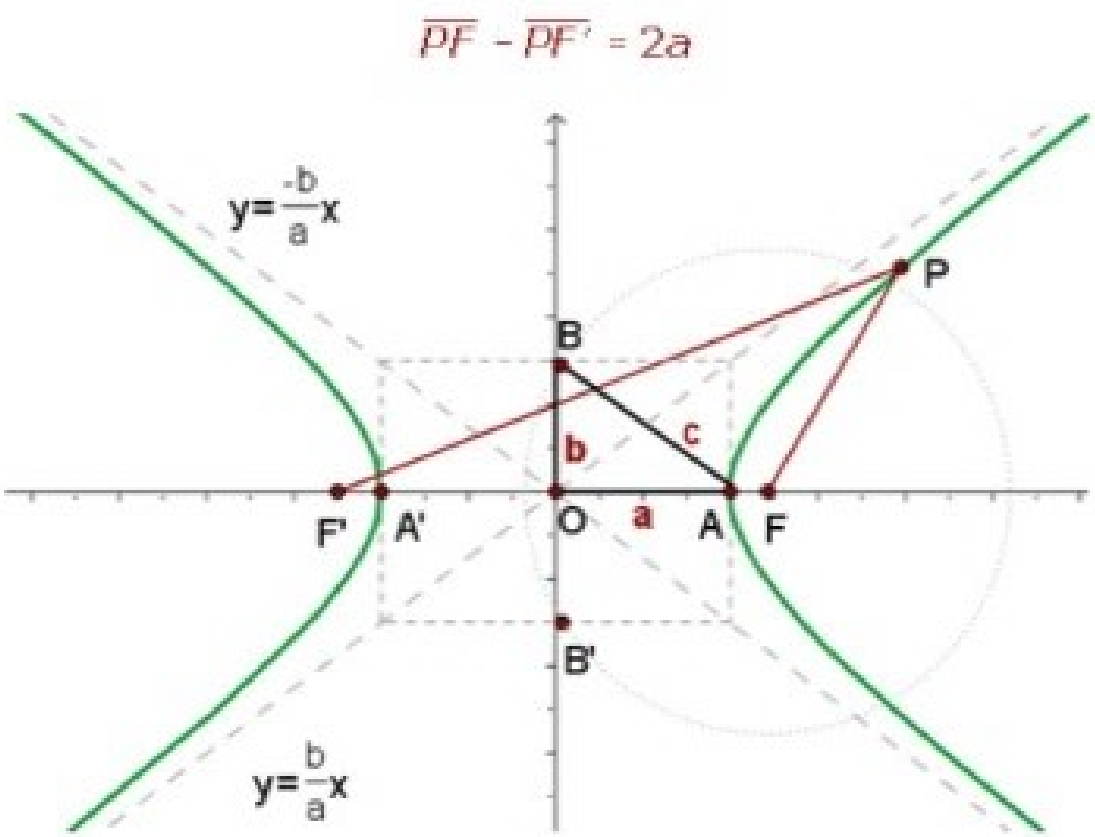
$$\frac{XX'''}{XX''} = \frac{AB}{AX} = \frac{BD}{DX''} = \frac{DP}{DX''}$$

Pero X" es el centro de gravedad de XX'", por lo tanto, por la ley de la palanca, vemos que XX', si lo llevamos hasta P como su punto medio, equilibrará XX'" en su posición actual. Esto será verdad para cualquier posición de X en AB. Además, como el triángulo ABC consiste en los segmentos XX'" en el triángulo y como el segmento parabólico AVB también está formado por las líneas XX', concluimos que el triángulo ABC en su situación actual estará en equilibrio en D con el segmento parabólico cuando este sea llevado a P como su centro de gravedad. Pero el centro de gravedad de ABC está en BD y está a 1/3 de la distancia desde D a B, por lo tanto, el segmento AVB es 1/3 el triángulo ABC o 4/3 el triángulo AVB.

La Superficie del segmento parabólico ABC es = 4/3 de la Superficie del triángulo ABC.

Definición y ecuaciones de la hipérbola

Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.



Elementos de la hipérbola

1.-Focos: Son los puntos fijos F y F'.
2.-Eje principal o real: Es la recta que pasa por los focos.
3.-Eje secundario o imaginario: Es la mediatriz del segmento FF'.
4.-Centro: Es el punto de intersección de los ejes.
5.-Vértices: Los puntos A y A' son los puntos de intersección de la hipérbola con el eje focal. Los puntos B y B' se obtienen como intersección del eje imaginario con la circunferencia que tiene por centro uno de los vértices y de radio c.
6.-Radios vectores: Son los segmentos que van desde un punto de la hipérbola a los focos: PF y PF' (r y r').
7.-Distancia focal: Es el segmento $\overline{FF'}$ de longitud **2c**.
8.- Distancia entre los vértices: Es el segmento $\overline{AA'}$ de longitud **2a**.
9.-Sobre eje menor se distingue el segmento $\overline{BB'}$ de longitud **2b**.
10.-Ejes de simetría: Son las rectas que contienen al eje real o al eje imaginario.
11.-Asíntotas: Son las rectas de ecuaciones:

$$y = -\frac{b}{a}x \ , \quad y = \frac{b}{a}x$$

Tiene dos asíntotas (rectas cuyas distancias a la curva tienden a cero cuando la curva se aleja hacia el infinito). Las hipérbolas cuyas asíntotas son perpendiculares se llaman hipérbolas equiláteras.

12.- Lado recto es el segmento perpendicular al eje real, que pasa por el foco y tiene por extremos los puntos de intersección con la hipérbola. Se calcula igual a: $\mathbf{LR = 2b^2/a}$

Relación entre los semiejes

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Ecuación de la hipérbola

Siguiendo la definición de hipérbola, planteamos la diferencia de distancias de un punto a los focos y desarrollamos:

$$PF - PF' = 2a, \text{ siendo } P(x, y), F(c, 0), F'(-c, 0)$$

Reemplazamos las distancias:

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = 2a$$

Desarrollando y sacando raíces cuadradas

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a + \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}$$

$$\left(\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}\right)^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$-4a^2 - 4cx = 4a\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}$$ *(Cancelamos términos y arreglamos, simplificamos la ecuación)*

$$(a^2 + cx)^2 = \left(a\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}\right)^2$$

$$\left.\begin{aligned} a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 &= a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) \\ a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 &= a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 \\ a^4 + c^2x^2 &= a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \\ a^4 - a^2c^2 &= a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 \\ a^2(a^2 - c^2) &= (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 \end{aligned}\right\}$$

recordemos que la relación entre a, b, c en la hipérbola es: $a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow a^2 - c^2 = -b^2$

$$a^2(-b^2) = (-b^2)x^2 + a^2y^2$$

$$1 = \frac{(-b^2)x^2}{a^2(-b^2)} + \frac{a^2y^2}{a^2(-b^2)} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Tendremos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación explícita o canónica de una hipérbola horizontal de centro en el origen de coordenadas C (0,0)

De la misma forma podemos demostrar que:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Ecuación explícita o canónica de una hipérbola vertical de centro en el origen de coordenadas C (0,0)

Si la hipérbola tiene su centro en el punto C (h, k), las ecuaciones quedarán:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Ecuaciones explícitas de una hipérbola de centro C (h, k), según su posición.

Para pasar a la ecuación general o implícita, desarrollaremos cuadrados:

$$\frac{(x-h)^2}{a} - \frac{(y-k)^2}{b} = 1$$

$$b^2 \cdot (x-h)^2 - a^2 \cdot (y-k)^2 = 1 - a^2 \cdot b^2$$

$$b^2 x^2 - 2b^2 hx + h^2 b^2 - a^2 y^2 + 2a^2 ky - a^2 k^2 - a^2 b^2 = 0$$

$$\underset{A}{b^2} x^2 - \underset{B}{a^2} y^2 - \underset{D}{2b^2 h} x + \underset{E}{2a^2 k} y \underbrace{- a^2 k^2 + b^2 h^2 - a^2 \cdot b^2}_{F} = 0$$

Escribimos:

$$Ax^2 - By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Esta ecuación coincide con la ecuación de una cónica, cumpliendo la condición:

$$A \cdot B < 0$$

Entonces:

$$\boldsymbol{Ax^2 - By^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

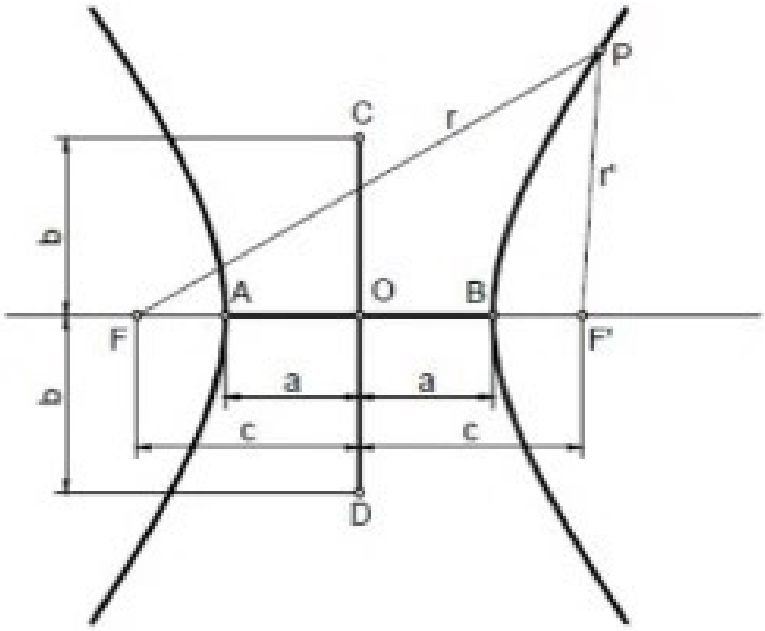
Ecuación implícita o general de la hipérbola, siendo $A \cdot B < 0$

Excentricidad de la hipérbola

Se define la excentricidad de la hipérbola de la siguiente forma: **e = c/a**. Como a < c, se tendrá que e > 1, para la hipérbola. Podemos, entonces, concluir que la hipérbola es una cónica cuya excentricidad es mayor que 1.

Según las dimensiones de los semiejes, se obtendrán tres tipos de hipérbolas:

1. Si a > b, se obtendrá una curva de ramas cerradas.
2. Si a = b, se obtendrá una hipérbola equilátera.
3. Si a < b, se obtendrá una curva de ramas abiertas.

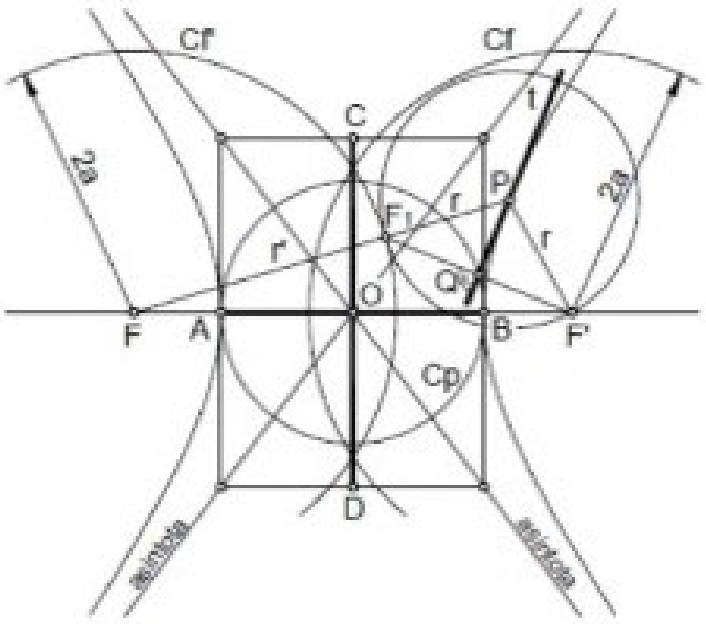


Circunferencias asociadas a una hipérbola

Se denomina circunferencia principal Cp a la circunferencia de centro **O** y diámetro **2a**. La circunferencia principal se define como el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares (Q), trazadas desde los focos a las tangentes (t) de la hipérbola. También se puede definir como el punto medio de los segmentos que unen un foco con la circunferencia focal del otro foco y las mediatrices de dichos segmentos son tangentes a la hipérbola.

Se denomina circunferencia focal Cf a la circunferencia de centro en uno de los focos de la hipérbola y radio **2a**. En una hipérbola se podrán trazar dos circunferencias focales. La circunferencia focal se define como el lugar geométrico de los puntos simétricos del otro foco (**F´**), respecto a las tangentes (**t**) de la hipérbola.

Observando la figura, también podemos definir la hipérbola como el lugar geométrico de los centros de circunferencia que pasan por un foco, y son tangentes a la circunferencia focal del otro foco.



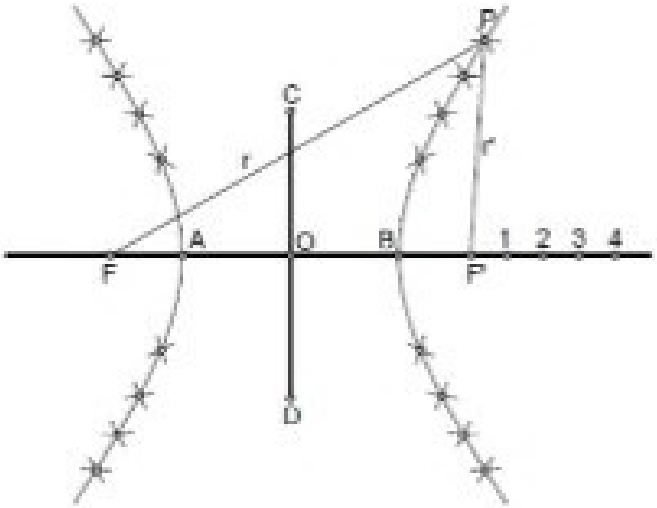
Dibujo y construcción de la hipérbola

- **Trazado de la hipérbola mediante radios vectores**

Teniendo en cuenta la definición de la hipérbola, solo necesitaremos tomar pares de radios vectores, cuya diferencia sea **2a**, para ello determinaremos una serie de puntos sobre el eje real, **1, 2, 3** etc., y tomaremos como parejas de radios vectores, los segmentos **A1–B1, A2–B2, A3–B3**, y así sucesivamente.

Con cada pareja de radios vectores se determinarán cuatro puntos de la hipérbola, uno en cada cuadrante de esta.

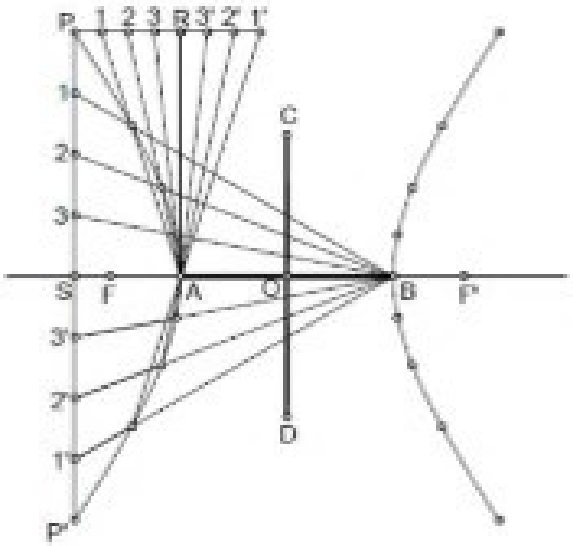
Cuanto mayor sea el número de puntos, mayor será la precisión del trazado de la hipérbola, que deberá realizarse, o bien a mano alzada o mediante reglas flexibles, o plantillas de curvas especiales.



- **Trazado de la hipérbola por haces proyectivos**

Comenzaremos obteniendo un punto **P** de la curva por radios vectores, trazaremos el rectángulo **ARPS** y dividiremos los lados **RP** y **PS** en un mismo número de partes iguales. Sobre la prolongación de **PR** y **PS** llevaremos esas mismas divisiones.

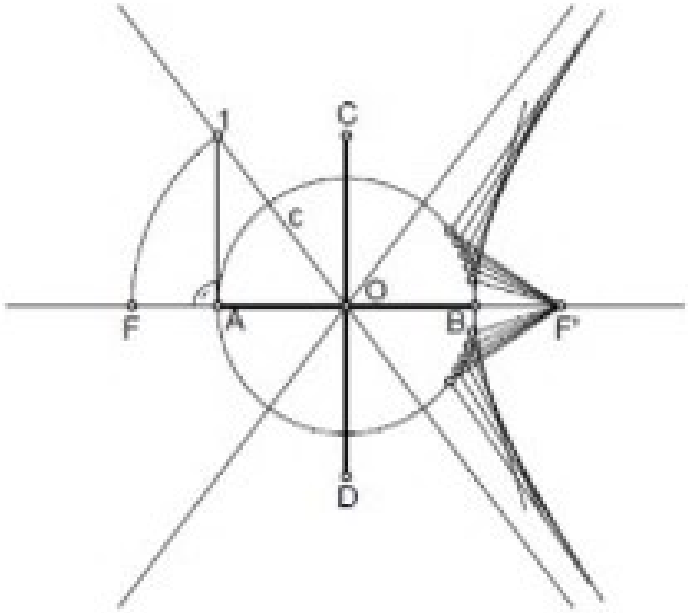
Seguidamente trazaremos rectas que unan el vértice **A** con las divisiones de **PR** y el vértice **Br** con las divisiones de **PS**, obteniendo en sus intersecciones, puntos, pertenecientes a la hipérbola buscada. Esto se repetirá para la otra rama de la hipérbola.



- **Trazado de la parábola por envolventes**

Para este trazado partiremos de puntos de la circunferencia principal. Uniremos dichos puntos con el foco F', y trazaremos por ellos perpendiculares a las rectas trazadas, obteniendo las rectas tangentes a la parábola. La curva se determinará mediante tangentes a dichas rectas.

Las asíntotas serán las tangentes a la hipérbola en el infinito, que determinaremos trazando el arco de centro en **O** y radio **O–F**. En la intersección de dicho arco con la perpendicular al eje real, trazada por el vértice **A**, determinaremos el punto **1**, perteneciente a la asíntota, solo restará unir dicho punto con el centro **O** de la hipérbola.



Excentricidades en secciones cónicas

En matemática y geometría la excentricidad e (también suele simbolizarse **ε** (épsilon)) es un parámetro que determina el grado de desviación de una sección cónica con respecto a una circunferencia.

Este es un parámetro importante en la definición de elipse, hipérbola y parábola:

Para cualquier punto perteneciente a una sección cónica, la razón de su distancia a un punto fijo F (foco) y a una recta fija l (directriz) es siempre igual a una constante positiva llamada excentricidad **ε**.

- La excentricidad de una circunferencia es 0 ($\varepsilon = 0$).
- La excentricidad de una elipse es mayor que cero y menor que 1 ($0 < \varepsilon < 1$).
- La excentricidad de una parábola es 1 ($\varepsilon = 1$).
- La excentricidad de una hipérbola es mayor que 1 ($\varepsilon > 1$).

Excentricidades en la elipse e hipérbola

La denominación de cónicas, según hemos visto, se atribuye a las curvas que se obtienen por sección de un cono circular recto con planos.

En este apartado estudiaremos las cónicas en relación con dos elementos fijos llamados foco y directriz.

Definición

Una sección cónica o simplemente una cónica es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya relación de distancias a un punto y una recta fijos es constante.

El punto fijo F se llama foco, la recta fija D directriz y la relación constante excentricidad que, normalmente, se representa por la letra e.

Teorema

El lugar geométrico de los puntos del plano tales que la razón constante e de la distancia a un punto y a una recta es una **elipse** si $e < 1$ y una **hipérbola** si $e > 1$.

Demostración

Probaremos que, en un sistema de referencia debidamente elegido, el lugar geométrico del plano que verifican las condiciones del enunciado está definido por las ecuaciones:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{si } e < 1, \text{ es decir, es una elipse}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{si } e > 1, \text{ es decir, es una hipérbola}$$

Establezcamos un sistema de referencia cuyo eje OX coincida con la recta que pasa por el foco F y es perpendicular a la directriz D (que ahora llamaremos r, con un origen O todavía no determinado). Sea p la distancia del foco a la directriz, la cual suponemos conocida. Introduzcamos ahora la variable c, distancia del origen de coordenadas al foco, $c = OF$.

En este sistema de referencia las coordenadas del foco son $F(c, 0)$ y la ecuación de la directriz D es $x - (c + p) = 0$.

Sea M (x, y) que ahora llamaremos $P(x, y)$ un punto cualquiera del plano, la relación será:

$$\frac{PF}{d(P, r)} = e \qquad [1]$$

Es una condición necesaria y suficiente para que P pertenezca a la sección cónica. Por las fórmulas de la distancia entre dos puntos y la distancia de un punto a una recta se tiene que:

$$PF = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \qquad d(P, r) = \left| x - (c + p) \right| \qquad [2]$$

De [1] y [2] se sigue la relación

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\left|x-(c+p)\right|}=e$$

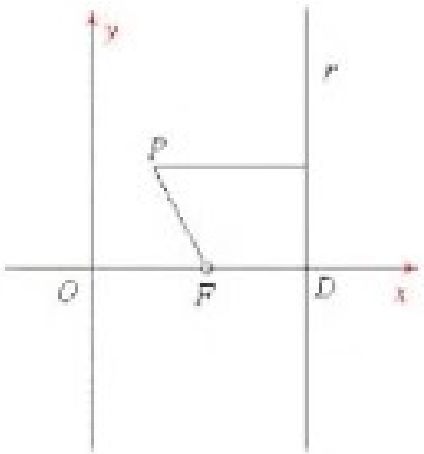
Es una condición necesaria y suficiente para que el punto P pertenezca a la cónica. Eliminando el radical y operando, se obtiene la igualdad:

$$\frac{x^2}{\dfrac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{\dfrac{e^2p^2}{1-e^2}}=1 \qquad [3]$$

Ahora será necesario efectuar la distinción de las dos posibilidades que ofrece la excentricidad e, de ser mayor o menor que 1. Al poner $a = e\,p/(1-e^2)$ para el denominador y^2 se tienen dos posibilidades:

si $e < 1$ entonces $b^2=\dfrac{e^2p^2}{1-e^2}$ si $1 < e$ entonces $b^2=\dfrac{e^2p^2}{1-e^2}$

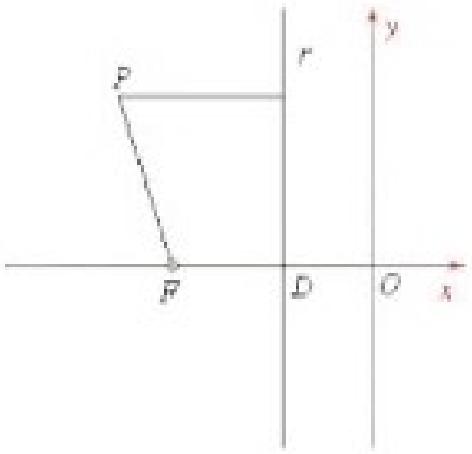
Por consiguiente, se tendrán dos tipos de cónicas, cuyas ecuaciones serán:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ elipse

$e < 1$

(Si $a = b$ corresponde a la ecuación de una circunferencia), y



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ hipérbola

$1 < e$

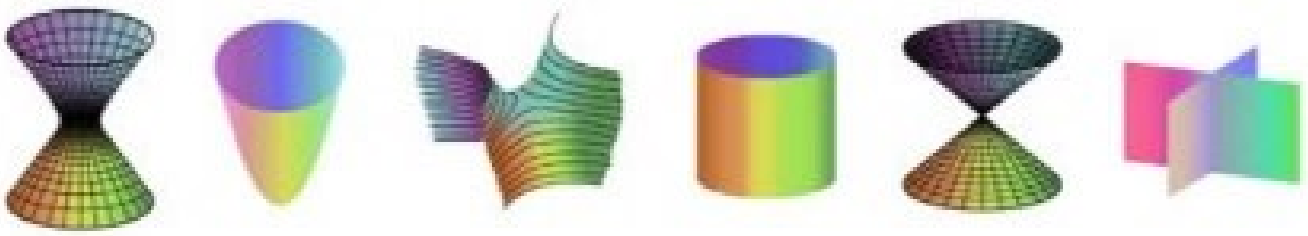
Algunas características generales para identificar las cónicas

Sección cónica	Ecuación canónica	Excentricidad	Lado recto	Elementos
Circunferencia	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$	$e=0$	$2r$	Centro C(h,k) Radio: r
Elipse	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$0<e<1$	$\frac{2b^2}{a}$	Centro C(h,k) Semieje mayor: a Semieje menor: b
Parábola	$(y-k)^2=4p(x-h)$	$e=1$	4p	Vértice V(h,k) Parámetro p
Hipérbola	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$e>1$	$\frac{2b^2}{a}$	Centro C(h,k) Semieje real: a Semieje imaginario:b

CAPÍTULO V

SUPERFICIES CUÁDRICAS

CAPÍTULO V
SUPERFICIES CUÁDRICAS



Un poco de historia

Joseph-Louis de Lagrange

Estatua de Lagrange en Turín

Joseph-Louis Lagrange nació en Turín el 25 de enero de 1736. Murió en París el 10 de abril de 1813). Fue un físico, matemático y astrónomo franco-italiano.

En Berlín aportó avances trascendentales en múltiples ramas de las matemáticas, desarrolló la mecánica lagrangiana y fue el autor de novedosos trabajos de astronomía. Tanto por la importancia como por el volumen de sus contribuciones científicas se le puede considerar uno de los físicos y matemáticos más destacados de la historia.

Lagrange fue educado en la Universidad de Turín y fue a los diecisiete años cuando mostró interés por la matemática. Cuando tenía tan sólo diecinueve años de edad envió una carta a Leonhard Euler para la resolución de los problemas de isoperimetría que habían sido un asunto de discusión durante más de medio siglo, mediante una nueva técnica: el cálculo de variaciones.

En 1766 Federico II el Grande escribió a Lagrange para expresarle su deseo de que "el rey más grande de Europa" debería tener "al matemático más grande de Europa" viviendo en su corte. Lagrange aceptó la oferta y durante los siguientes veinte años en Prusia produjo nada menos que la serie más valiosa de documentos científicos, incluyendo su trabajo monumental, la *Mécanique analytique*.

Gracias a la recomendación de D'alembert y de Euler, Lagrange sucedió a este último como director de la Academia de las Ciencias de Berlín.

En 1786 Lagrange aceptó la oferta de Luis XVI para emigrar a París.

En 1793 le ofrecieron la presidencia de la comisión para la reforma de pesos y medidas. La opción de las unidades finalmente seleccionadas se debía principalmente a él y, por su influencia, la comisión aceptó la subdivisión decimal en 1799.

Astronomía: Puntos de equilibrio potencial entre La Tierra y el Sol fueron deducidos por Lagrange. Trabajó sobre la libración de la Luna y una explicación acerca de por qué siempre ofrece la misma cara a la Tierra, un problema que trató con la ayuda del trabajo virtual. Estudió la estabilidad de las órbitas planetarias en 1776.

Álgebra: Envió la mayor parte de sus artículos sobre álgebra a la Academia de Berlín. Cabe destacar su discusión de la solución entera de las formas cuadráticas y el proceso general para resolver una ecuación algebraica de cualquier grado.

En 1773 enuncia los determinantes de segundo y tercer orden, y de sus invariantes. Enuncia también un teorema que lleva su nombre y las ecuaciones diferenciales.

Mecánica analítica o lagrangiana: Entre 1772 y 1788, Lagrange reformuló la mecánica clásica de Isaac Newton para simplificar fórmulas y facilitar los cálculos. Esta mecánica se llama mecánica lagrangiana y es el origen de la mecánica analítica.

Fracciones continuas: Su *Résolution des équations numériques*, publicada en 1798, también es fruto de sus conferencias en la Escuela politécnica. En ella da el método de aproximar las raíces reales de una ecuación por medio de fracciones continuas.

Matemática pura: Un reciente escritor sobre Lagrange dice que desempeñó un papel verdaderamente prominente en el avance de casi todas las ramas de la matemática pura. Como Diofanto y Fermat, Lagrange poseía un genio especial para la teoría de números, y en este asunto dio soluciones a muchos de los problemas que se habían propuesto por Fermat y agregó algunos teoremas propios. Creó el cálculo de variaciones.

Miscelánea: Hay numerosos artículos sobre varios puntos de geometría analítica. En dos de ellos, escritos en 1792 y 1793, redujo las cuádricas a su forma canónica.

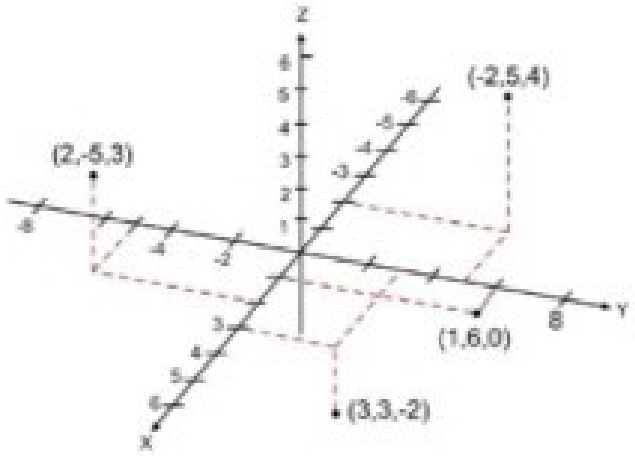
Durante los últimos años en Francia su trabajo se centró en el análisis matemático.

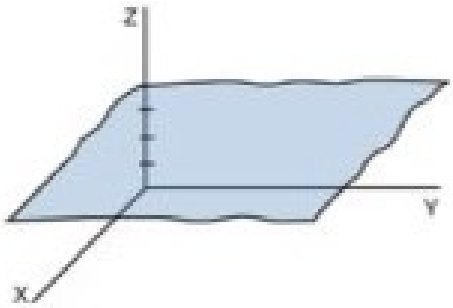
Cuádricas

En esta sección vamos a tratar sobre las cuádricas. Son superficies cuyas formas se definen en el espacio. No se pretende hacer un estudio exhaustivo de ellas, sino sólo presentarlas para su conocimiento, ya que son superficies muy usadas y apreciadas en la arquitectura.

Se presentarán sus ecuaciones reducidas, para que, de alguna manera, puedan ser comparadas con las cónicas en el plano que hemos estudiado en el capítulo anterior.

Al estar en espacio, intervienen los tres ejes coordenados X, Y, Z. De esta manera un punto en el espacio queda definido según la terna ordenada (x, y, z).





Plano Z=4, paralelo al plano formado por los ejes XY

Citaremos también a los planos perpendiculares a los ejes de la forma:
X plano paralelo al plano formado por los ejes YZ
Y plano paralelo al plano formado por los ejes XZ
Z plano paralelo al plano formado por los ejes YX

Definición

En general, una cuádrica es la superficie formada por todos los puntos del espacio cuyas coordenadas (x, y, z) verifican una ecuación de segundo grado:

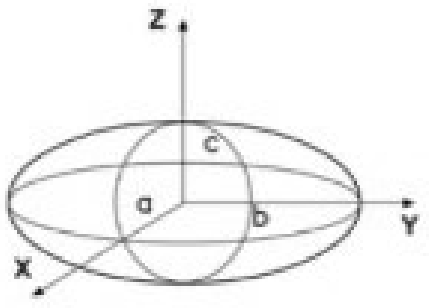
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0$$

que es la ecuación general de una cuádrica.

Vamos a plantear las ecuaciones para cuádricas con centro (o vértice) en el origen de coordenadas: (0, 0, 0)

1.- Elipsoides

Los elipsoides se obtienen cuando, una vez completados cuadrados en la ecuación general de la cuádrica, nos quedan tres términos de segundo grado con coeficientes del mismo signo:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\begin{cases}1\\0\\-1\end{cases} \quad con \quad a,b \wedge c \neq o$$

Resulta una superficie simétrica respecto al origen de coordenadas, a cada uno de los ejes y a cada uno de los planos coordenados. Si un punto (x, y, z) pertenece a dicha superficie (sus coordenadas verifican la ecuación), los puntos (–x, y, z), (x, –y, z) y (x, y, –z) también pertenecen.

Elementos de un elipsoide son:

- Centro de simetría, (x = 0, y = 0, z = 0).
- Planos y ejes de simetría, los coordenados.
- Vértices, puntos de corte del elipsoide con sus ejes de simetría: En este, los puntos (±a, 0, 0), (0, ±b, 0), (0, 0, ±c).
- Los semiejes a, b, c, distancias del centro a los vértices.

Particularidades:

Cuando los tres semiejes del elipsoide son iguales, a = b = c, tenemos una esfera de centro, el origen de coordenadas (x = 0, y = 0, z = 0) y radio r, cuya ecuación será:

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

La ecuación

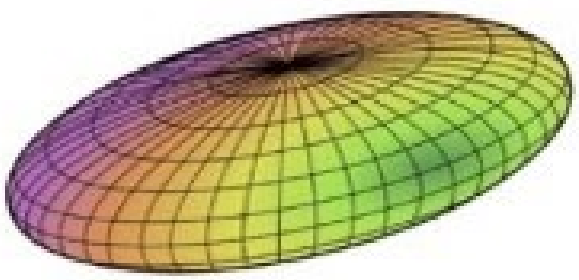
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

tiene como única solución real (x = 0, y = 0, z = 0). La cuádrica será un punto.

La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

no tiene ninguna solución real, es decir, no representa a ninguna superficie del espacio real. La cuádrica será un elipsoide imaginario.



Entonces, la ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

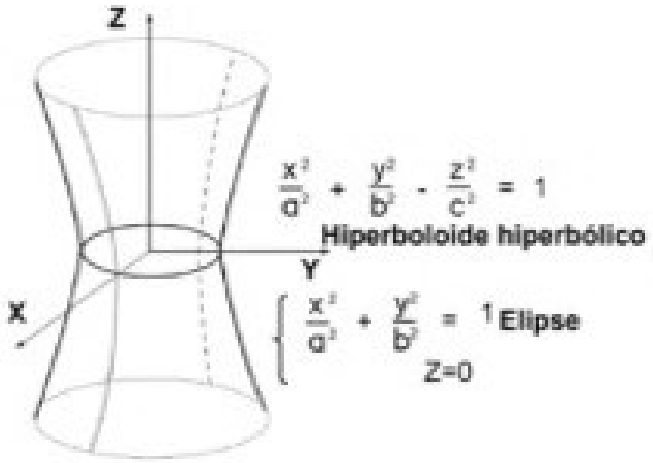
2.- Hiperboloides y cono

El hiperboloide es la superficie de revolución generada por la rotación de una hipérbola alrededor de uno de sus dos ejes de simetría. Dependiendo del eje elegido, el hiperboloide puede ser de una o dos hojas.

Los hiperboloides y el cono se obtienen cuando, una vez completados cuadrados en la ecuación general de la cuádrica, nos quedan tres términos de segundo grado con dos coeficientes del mismo signo y el otro de distinto signo. Tendremos distintos hiperboloides:

2a.- Hiperboloide hiperbólico o de una hoja:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad con \quad a,b,c \neq 0$$



Es una superficie denominada hiperboloide hiperbólico o de una hoja. Notemos que al cortar esta superficie con planos Z = k, paralelos al plano XY, se obtienen elipses, al cortar con planos X = k ´o Y = k, paralelos a los otros dos planos coordenados, se obtienen hipérbolas.

(Si el hiperboloide es paralelo a los otros ejes, los términos negativos de la ecuación serán los correspondientes a x^2 o y^2, según convenga).

Elementos de un hiperboloide:

- Centro: es el origen de coordenadas x = 0, y = 0, z = 0
- Eje de simetría: es el eje OZ

Particularidades:

Al igual que el elipsoide, el hiperboloide es simétrico respecto a los planos y ejes coordenados. Si un punto (X, Y, Z) verifica la ecuación, los puntos

$$(\pm X, \pm Y, \pm Z)$$

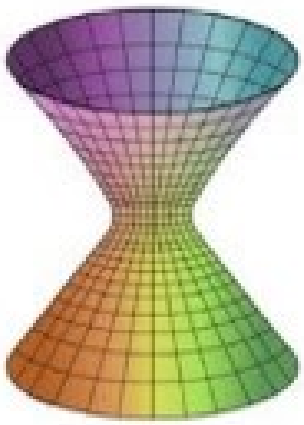
también verifican dicha ecuación. Los cortes con los planos coordenados son:

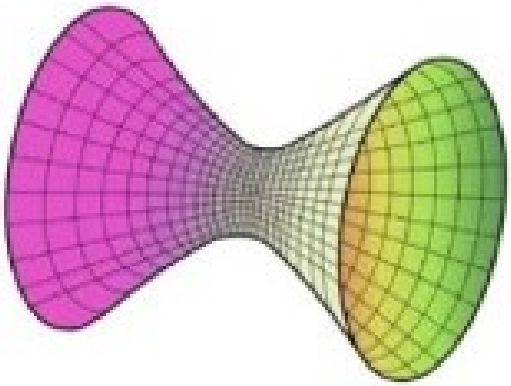
**con Z = 0, la elipse (llamada elipse de garganta):* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$

**con Y = 0, la hipérbola:* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

**con X = 0, la hipérbola:* $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

Ecuación reducida en distintas posiciones (hiperboloide de una hoja):





$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

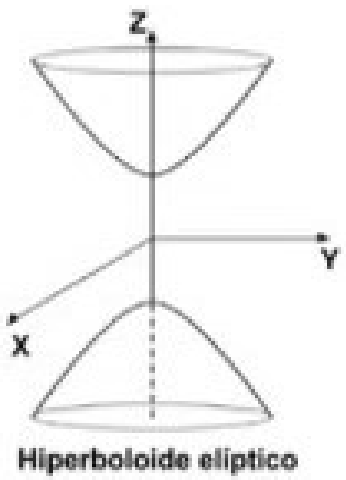
2b.-Hiperboloide elíptico o de dos hojas

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Notemos que al cortar esta superficie con planos Z = k, paralelos al plano. OXY, se obtienen elipses (o un punto o nada).

X = k, paralelos al plano OYZ, se obtienen hipérbolas

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\frac{k^2}{a^2}-1$$



Hiperboloide elíptico

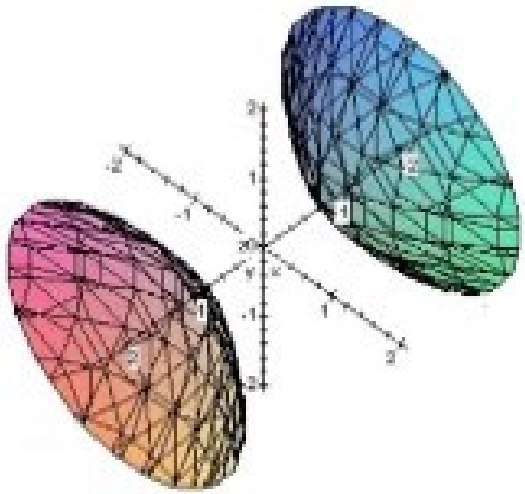
Y = k, paralelos al plano OXZ, se obtienen hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{k^2}{b^2} \cdot 1$$

Los elementos de un hiperboloide de dos hojas son:

- Centro: en este caso, el origen de coordenadas (x = 0, y = 0, z = 0)
- Eje de simetría: Z, en este caso.

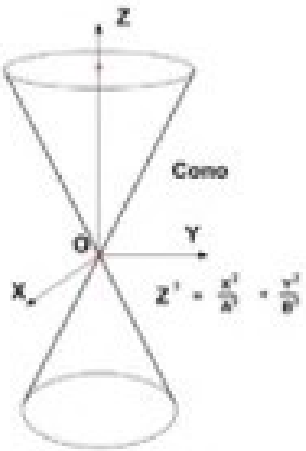
El hiperboloide de dos hojas es simétrico respecto a los planos y ejes coordenados.
Ecuación reducida en distintas posiciones (hiperboloide de dos hojas)



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

2c.- Cono:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Es un caso particular de los dos tipos de hiperboloides que acabamos de ver.
Despejando, resulta:

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad con \quad a,b,c \neq 0$$

Notemos que al cortar esta superficie con planos Z = k paralelos al plano XY, se obtienen elipses y al cortar con planos paralelos a los otros dos planos coordenados se obtienen hipérbolas.

En la ecuación anterior, hacemos

$$\frac{z^2}{c^2} = k$$

Tengamos en cuenta que un cono es una superficie que puede ser descrita fácilmente mediante rectas: si tenemos una elipse en el espacio y un punto V que no está en el plano de la elipse, la superficie formada por las rectas que pasan por V y por un punto de la elipse es un cono con vértice V.

Elementos de un cono:

- Vértice: en los casos considerados es el origen de coordenadas (0, 0, 0).
- Eje: que en los casos considerados es el eje OZ.

3.- Paraboloides

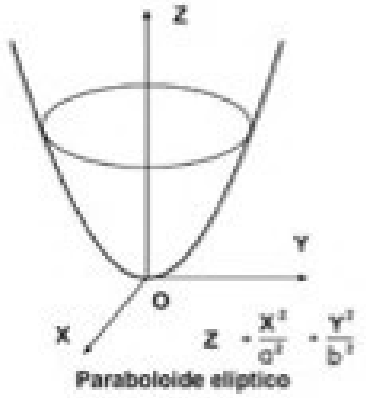
Los paraboloides se obtienen cuando en la ecuación reducida aparecen dos términos de segundo grado y un término de primer grado.

Tendremos:

3a.-Paraboloide elíptico:

$$z = \pm\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) \quad ó \quad z = \pm\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \quad con\ a,b \neq 0$$

Al cortar con planos paralelos a los planos coordenados, por ejemplo, la superficie correspondiente al signo (+) en el segundo miembro, obtenemos:



Paraboloide elíptico

$con\ x = k$, las parábolas dadas por $z - \frac{k^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$ (en el plano $x = k$)

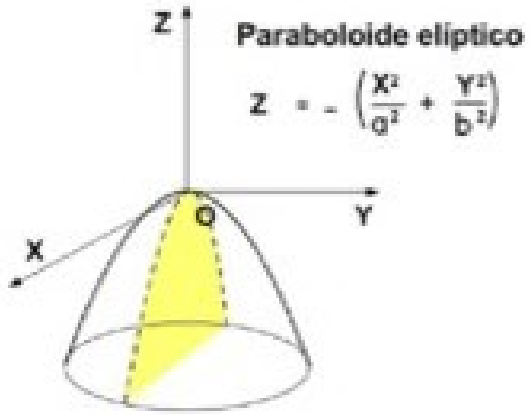
$con\ y = k$, las parábolas dadas por $z - \frac{k^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2}$ (en el plano $y = k$)

$con\ z = k$, las elipses (o un punto, o nada) dadas por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{b^2} = k$

(en el plano $z = k$)

Elementos de un paraboloide elíptico:

- Vértice
- Eje de simetría



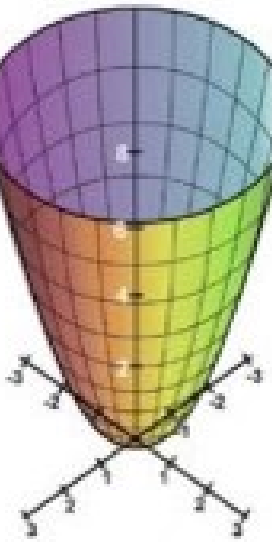
En el caso:

$$z=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\begin{cases}vértice(0,0,0)\\ eje\ de\ simetría\ Z\end{cases}$$

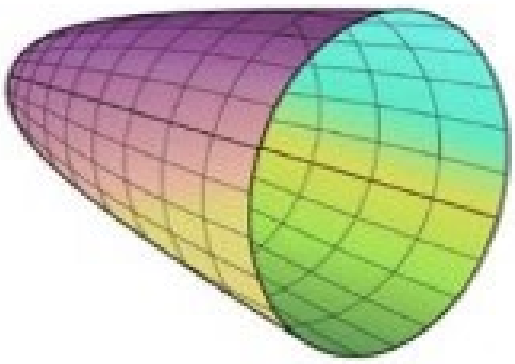
Si la ecuación es:

$$z=-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$$

la superficie es la misma, pero "mira hacia abajo", valores negativos de Z.

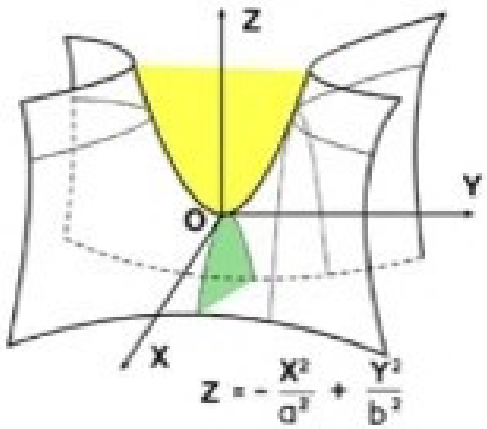


$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$



$$y=\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}$$

3b.- Paraboloide hiperbólico



Paraboloide hiperbólico

$$z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad a,b \neq 0$$

Corresponde a una superficie, denominada paraboloide hiperbólico, denominada también la "silla de montar" por su forma.

Al cortar con planos paralelos a los planos coordenados obtenemos:

**con $x = k$, las parábolas dadas por $z + \frac{k^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$*

(en el plano $x = k$)

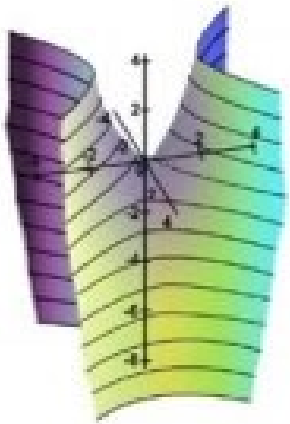
**con $y = k$, las parábolas dadas por $\frac{x^2}{a^2} = -\left(z + \frac{k^2}{b^2}\right)$*

(en el plano $y = k$)

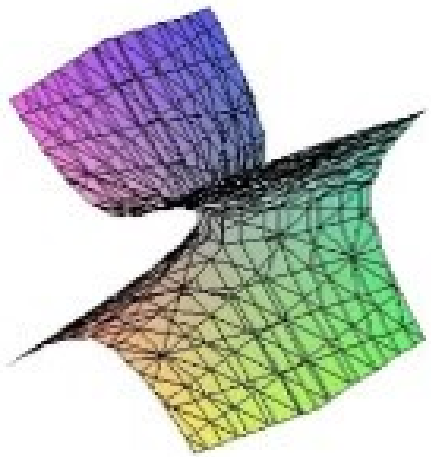
**con $z = k$, las hipérbolas dadas por $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{b^2} = k$*

(en el plano $z = k$)(si $k \neq 0$)

Ecuaciones según las distintas posiciones:



$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

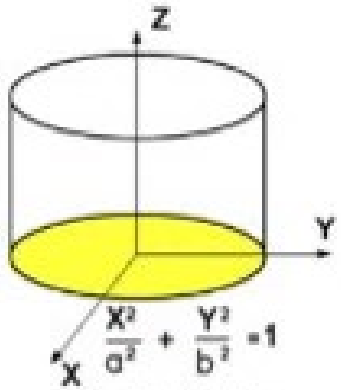


$$x = \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

4.- Cilindros y cuádricas degeneradas

En este caso, en la ecuación reducida no aparece alguna de las variables.

4 a.- Cilindro elíptico:



Cilindro Elíptico

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\begin{cases}1\\0\\-1\end{cases}$$

Podemos tener:
Cilindro elíptico, si

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

En este caso, el cilindro es paralelo al eje Z; además, recordemos que, cambiando las variables, obtendremos distintas posiciones.
Recta doble:

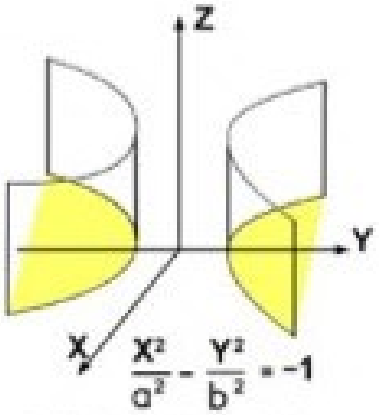
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

Cilindro imaginario:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$

Ya que no hay ningún punto en R3 que verifique la ecuación.

4b.- Cilindro hiperbólico:



Cilindro hiperbólico

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\begin{cases}\pm 1\\ 0\end{cases}$$

Podemos tener:
Cilindro hiperbólico:

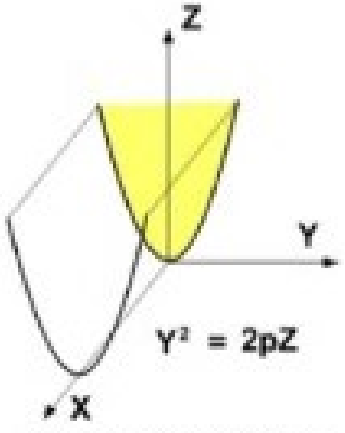
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$$

En este caso, el cilindro es paralelo al eje Z; además, recordemos que cambiando las variables, obtendremos distintas posiciones.

Par de planos secantes:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \quad ; \quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \quad \acute{o} \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$$

4 c.- Cilindro tipo parabólico:



Cilindro parabólico

La ecuación tiene una única variable al cuadrado:

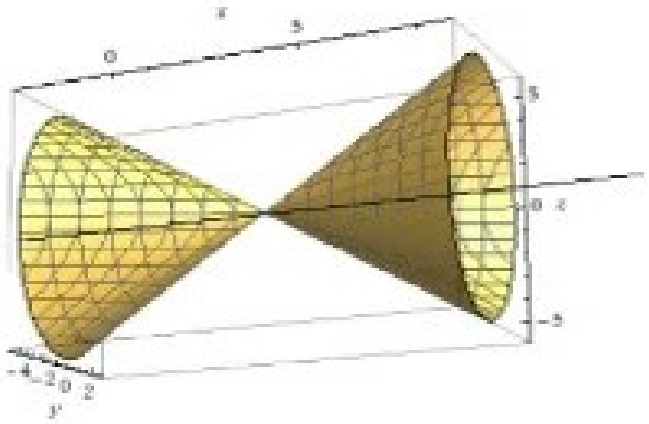
$$y^2=ax+bz+c$$

Atención: Si la cuádrica está desfasada con respecto al origen de coordenadas, su centro será (h, k, j) y se considera igual que en las cónicas planas.

Resultaría, por ejemplo, la expresión:

$$\frac{(z-j)^2}{c^2} = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2}$$

Para un cono de Centro (h, k, j) y con eje de simetría paralelo al eje Z.



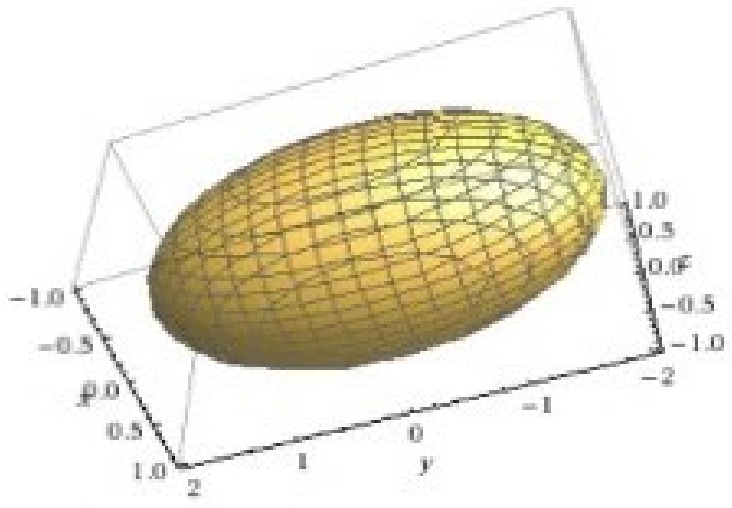
Ejemplo 1: graficar y señalar vértice y eje de simetría $(x - 3)^2 - 2 (y + 1)^2 + z^2$
Vértice será: (3, -1, 0) Eje de simetría: el eje X

Ejemplo 2: consideremos la cuádrica de ecuación

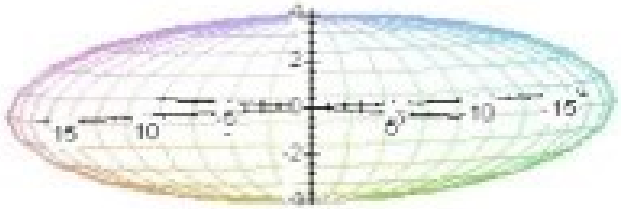
$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 = 1$$

$$\textit{resolviendo}: x^2 + \frac{y^2}{1/4} + z^2 = 1$$

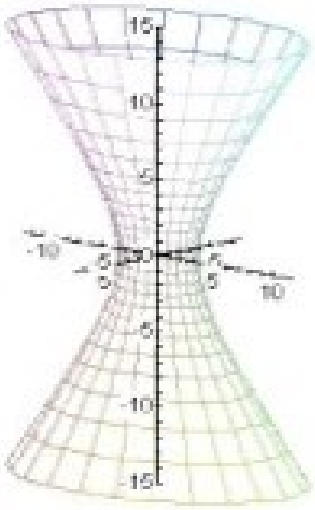
Resulta ser un elipsoide de centro (0, 0, 0)



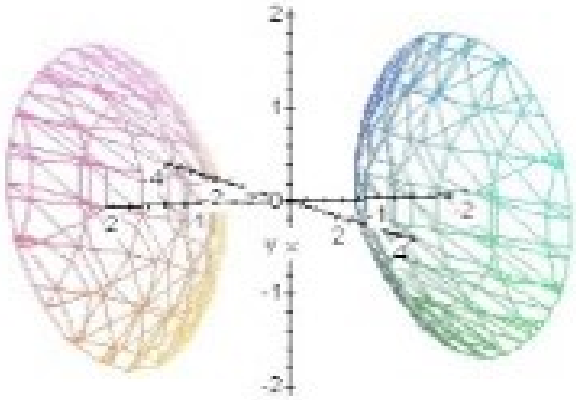
Ejemplos de gráficas:



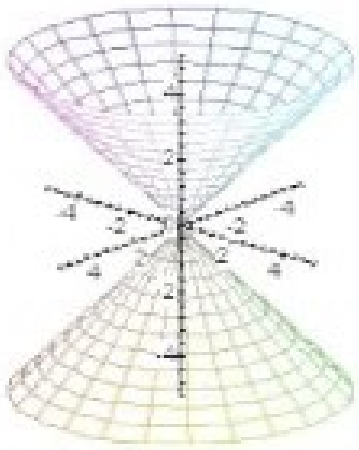
elipsóide



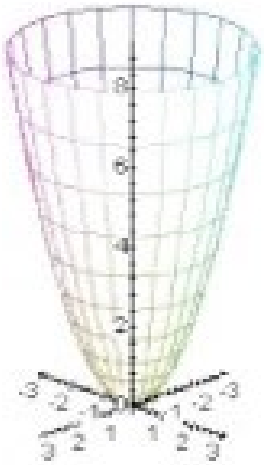
hiperboloide hiperbólico



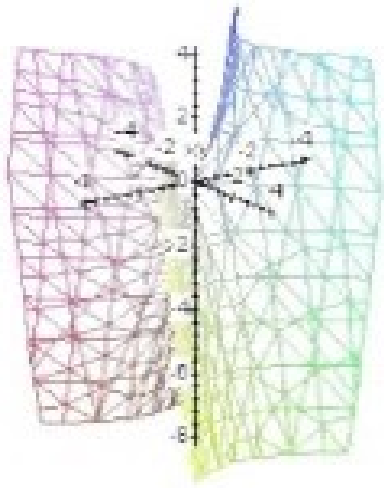
hiperboloide elíptico



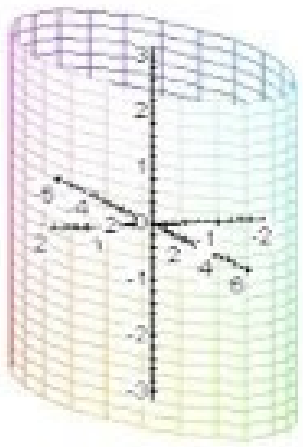
cone



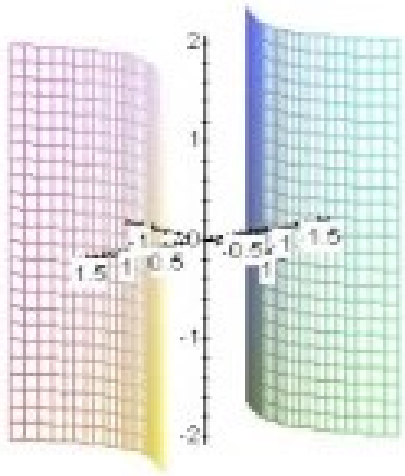
parabolóide elíptico



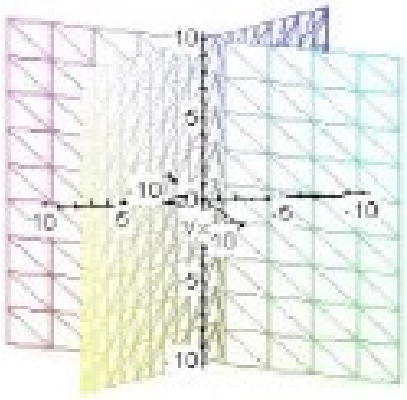
parabolóide hiperbólico



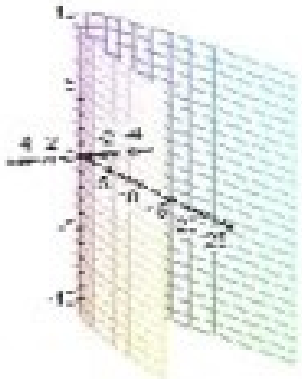
cilindro elíptico



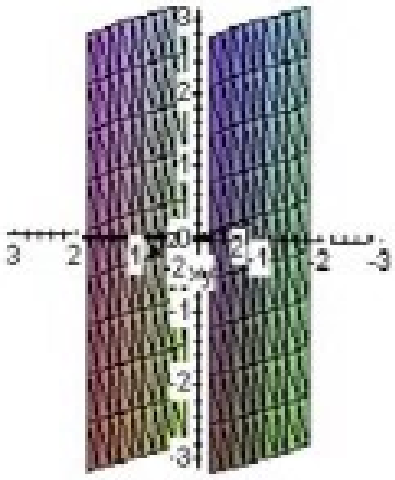
cilindro hiperbólico



par de planos secantes



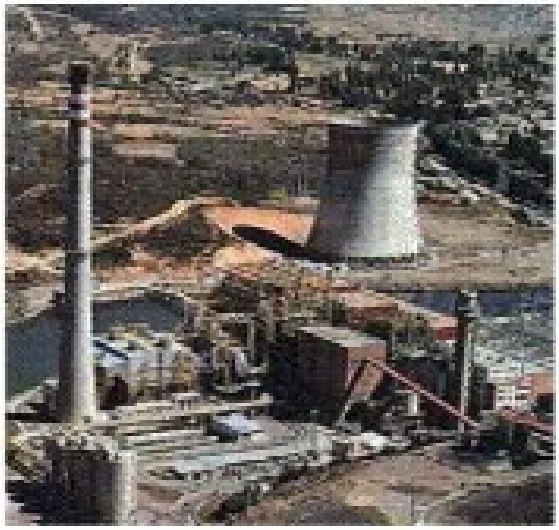
cilindro parabólico



par de planos paralelos

Ejemplos reales:

Elipsoide



Hiperboloide de una hoja

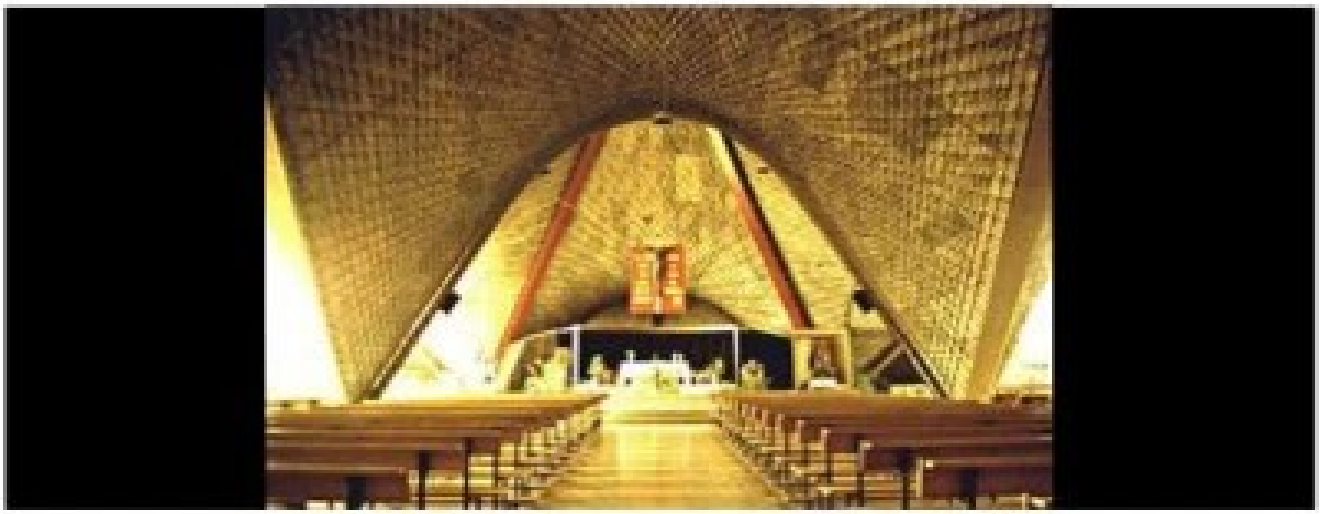
Hiperboloide de dos hojas

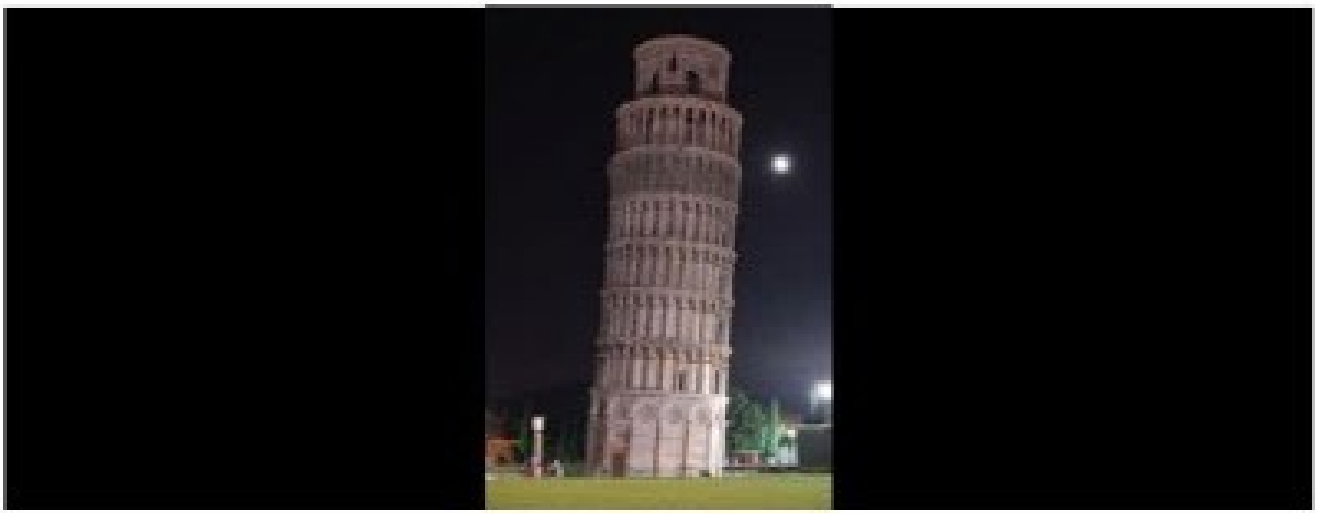
Paraboloide elíptico

Las cuádricas en la arquitectura

En el siguiente elenco de obras de arquitectura, descubrir la presencia de la superficie cuádrica y su aplicación.

1.- Las estereo-estructuras de grandes luces en el aeropuerto de Beijing (Capital de China).
2.- Cubierta metálica sobre la tribuna en el Sheick Kalifa Stadium de Dubai.
3.- Hangares de aeropuerto.
4.- Convention & Exhibition Centre, ubicado en Hong Kong.
5.- Capilla del Liceo Alemán, ubicada en Los Ángeles, Chile. El diseñador resolvió la cubierta con una estereo-estructura con forma de paraboloide hiperbólico, con vigas de borde apoyadas en sus puntos bajos.
6.- La Torre de Pisa.
7.- El Coliseo romano.
8.- Torres Petronas en Kuala Lumpur.



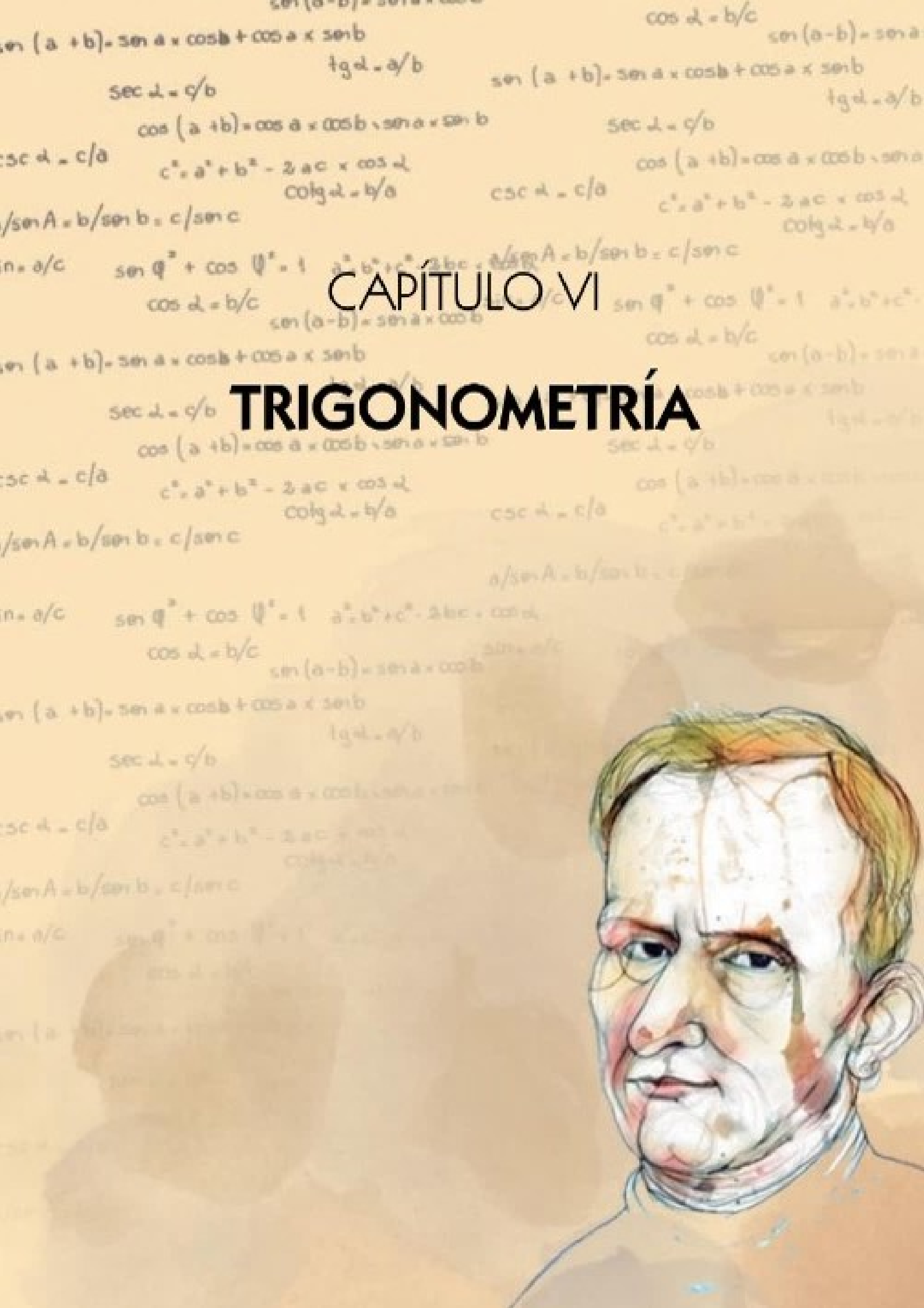


Bibliografía del capítulo:

http://www.wolframalpha.com
www.matematicaaplicada2.es
https://algebraunq.wikispaces.com

CAPÍTULO VI

TRIGONOMETRÍA

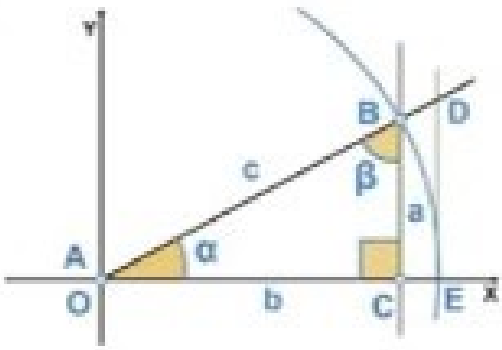


CAPÍTULO VI
TRIGONOMETRÍA

La trigonometría es una rama de la matemática, cuyo significado etimológico es "la medición de los triángulos".

En términos generales, la trigonometría es el estudio de las razones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Interviene directa o indirectamente en las demás ramas de la matemática y se aplica en todos aquellos ámbitos donde se requieren medidas de precisión. La trigonometría se aplica a otras ramas de la geometría, como es el caso del estudio de las esferas en la geometría del espacio.

Posee numerosas aplicaciones: las técnicas de triangulación, por ejemplo, son usadas en astronomía para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas de navegación por satélites.



Representación gráfica de un triángulo rectángulo en un sistema de coordenadas cartesianas.

Historia de la trigonometría

Los antiguos egipcios y los babilonios conocían ya los teoremas sobre las proporciones de los lados de los triángulos semejantes. Pero las sociedades prehelénicas carecían de la noción de una medida del ángulo y, por lo tanto, los lados de los triángulos se estudiaron en su medida, un campo que se podría llamar trilaterometría.

Los astrónomos babilonios llevaron registros detallados sobre la salida y puesta de las estrellas, el movimiento de los planetas y los eclipses solares y lunares, todo lo cual requiere la familiaridad con la distancia angular medida sobre la esfera celeste.

Sobre la base de una interpretación de la tablilla cuneiforme Plimpton (1900 a.C.), algunos incluso han afirmado que los antiguos babilonios tenían una tabla de secantes. Hoy, sin embargo, hay un gran debate acerca de si se trata de una tabla de ternas pitagóricas, una tabla de soluciones de ecuaciones segundo grado, o una tabla trigonométrica.

Los egipcios, en el segundo milenio antes de Cristo, utilizaban una forma primitiva de la trigonometría, para la construcción de las pirámides. El Papiro de Ahmes, escrito por el escriba egipcio Ahmes (1680-1620 a.C.), contiene el siguiente problema relacionado con la trigonometría: "Si una pirámide es de 250 codos de alto y el lado de su base es de 360 codos de largo, ¿cuál es su Seked?"

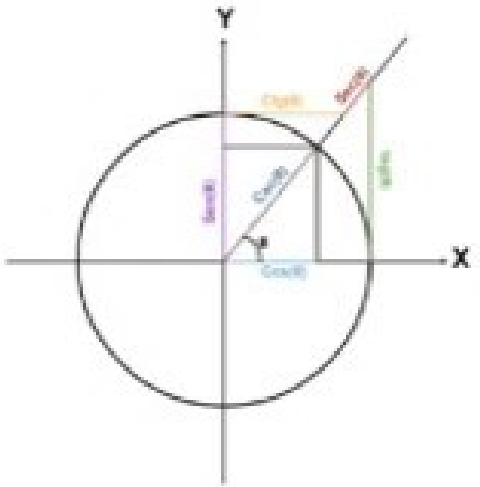
La solución al problema es la relación entre la mitad del lado de la base de la pirámide y su altura. En otras palabras, la medida que se encuentra para la *seked* es la cotangente del ángulo que forma la base de la pirámide y su cara.

Función trigonométrica

La trigonometría es una rama importante de las matemáticas dedicada al estudio de la relación entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo y una circunferencia, luego extendida a todos los triángulos. Con este propósito se definieron una serie de funciones, las que han sobrepasado su fin original para convertirse en elementos matemáticos estudiados en sí mismos y con aplicaciones en los campos más diversos.

Círculo trigonométrico – Líneas trigonométricas

También conocido como goniométrico, es aquel círculo cuyo centro coincide con el origen de coordenadas del plano cartesiano y cuyo radio mide la unidad. El círculo trigonométrico tiene la ventaja de ser una herramienta práctica en el manejo de los conceptos de trigonometría, pero al mismo tiempo es un apoyo teórico, pues ayuda a fundamentar y tener una idea precisa y formal de las funciones trigonométricas. A través del círculo trigonométrico se puede obtener de forma manual o analítica el valor aproximado de las razones trigonométricas para un ángulo determinado si se dispone de los instrumentos geométricos necesarios.



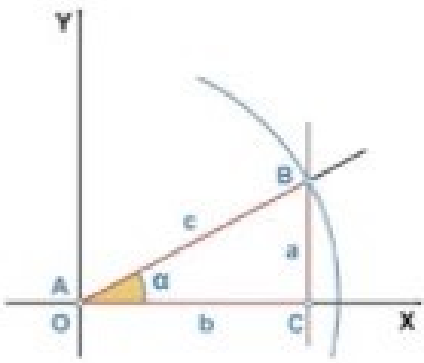
Círculo trigonométrico

Características

Se toma como base un círculo de radio $r = 1$ con centro o, en el origen en el plano cartesiano. Se considera un ángulo arbitrario medido a partir del eje x positivo y en sentido positivo; o sea, en sentido contrario a las manecillas del reloj; todo ángulo puede ser colocado (y de una sola manera) de forma tal que su vértice coincida con el origen de coordenada , uno de sus lados (llamado lado inicial) coincida con la semirrecta OX, y el otro lado (llamado lado terminal) quede ubicado (a partir del inicial) en la zona de barrida en sentido contrario a la manecilla del reloj.

Razones trigonométricas

El triángulo ABC es un triángulo rectángulo en C; lo usaremos para definir las razones seno, coseno y tangente, del ángulo **a**, correspondiente al vértice **A**, situado en el centro de la circunferencia.



- El seno (abreviado como *sen*, o *sin* por llamarse "sĭnus" en latín) es la razón entre el cateto opuesto sobre la hipotenusa.

$$\operatorname{sin}\ \alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}$$

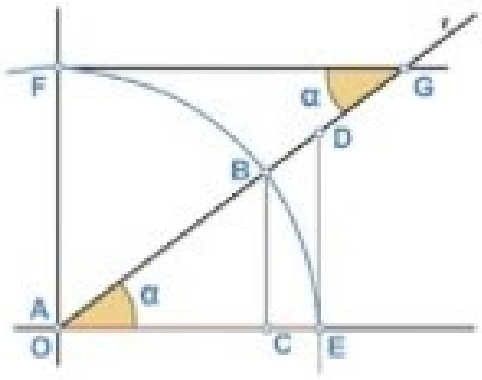
- El coseno (abreviado como *cos*) es la razón entre el cateto adyacente sobre la hipotenusa.

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$$

- La tangente (abreviado como *tan* o *tg*) es la razón entre el cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

$$\tan\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{a}{b}$$

Razones trigonométricas inversas



Triángulo ABC proporcional con un ángulo inscrito en una circunferencia de centro A y radio 1.

- La cosecante: (abreviado como *csc* o *cosec*) es la razón inversa de seno, o también su inverso multiplicativo:

$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sin}\ \alpha} = \frac{c}{a}$$

En el esquema su representación geométrica es:

$$\csc\alpha = \overline{AG}$$

- La secante: (abreviado como *sec*) es la razón inversa de coseno, o también su inverso multiplicativo:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\ \alpha} = \frac{c}{b}$$

En el esquema su representación geométrica es:

$$\sec \alpha = \overline{AD}$$

- La cotangente: (abreviado como *cot* o *cotg*) es la razón inversa de la tangente, o también su inverso multiplicativo:

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{b}{a}$$

En el esquema su representación geométrica es:

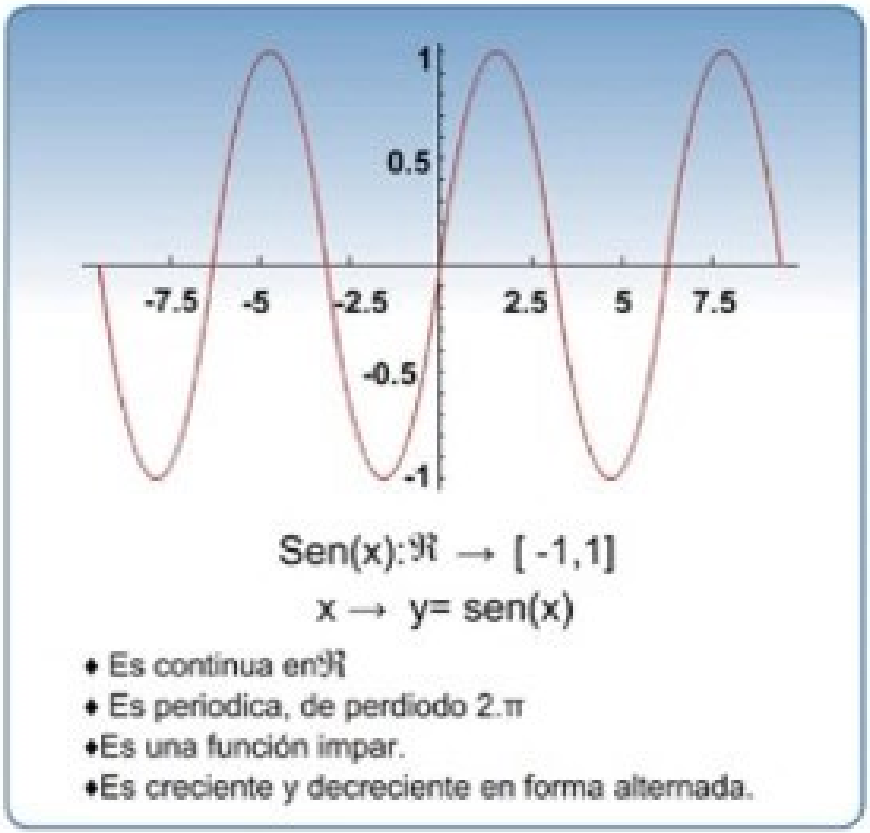
$$\cot \alpha = \overline{GF}$$

Normalmente se emplean las relaciones trigonométricas **seno, coseno y tangente,** y salvo que haya un interés específico en hablar de ellos o las expresiones matemáticas se simplifiquen mucho, los términos cosecante, secante y cotangente no suelen utilizarse.

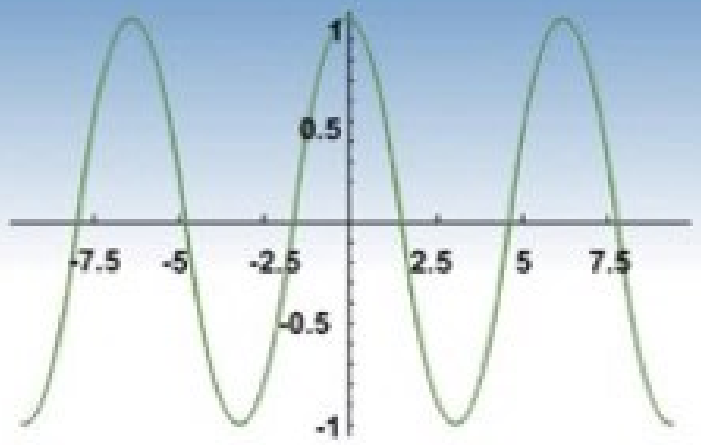
Curvas trigonométricas

Sinusoide

La curva que representa gráficamente la función y= sen(x) se llama sinusoide.



Cosinusoide

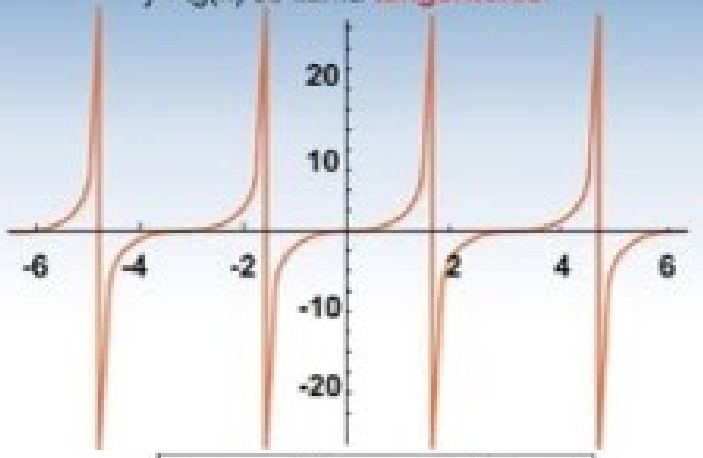


$$\cos(x): \Re \longrightarrow [-1,1]$$
$$x \longrightarrow y = \cos(x)$$

- Es continua en $\Re$
- Es periódica, de periodo $2.\pi$
- Es una función par.
- Es creciente y decreciente en forma alternada.

Tangentoide

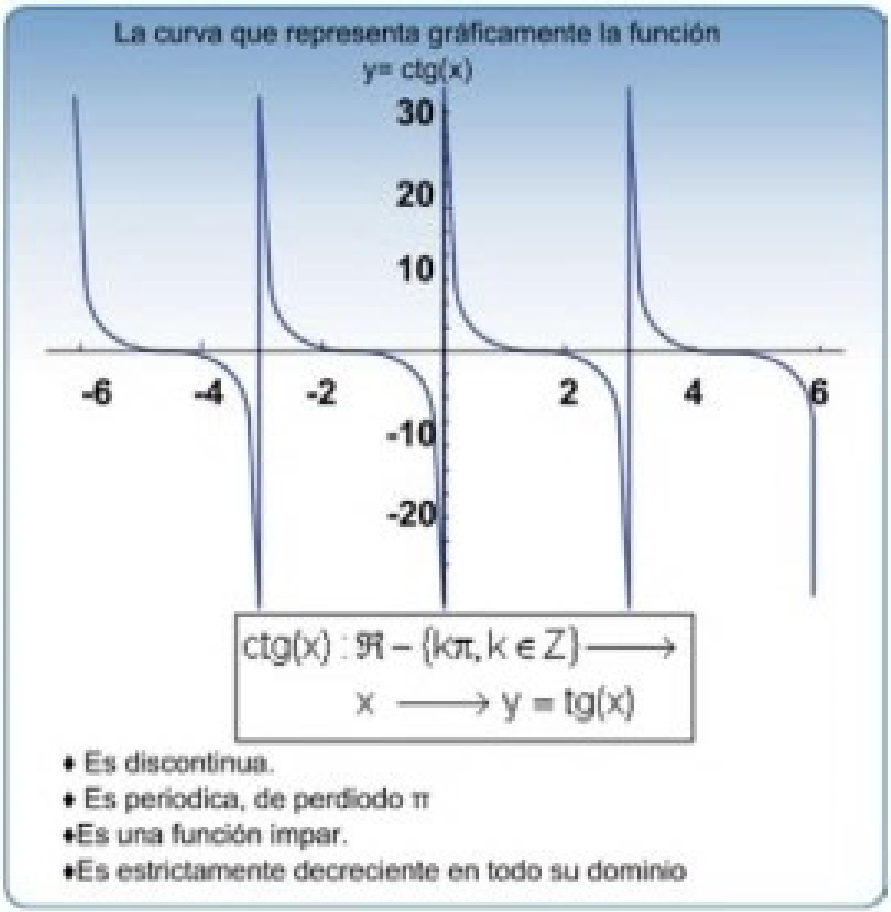
La curva que representa gráficamente la función $y = tg(x)$ se llama tangentoide.



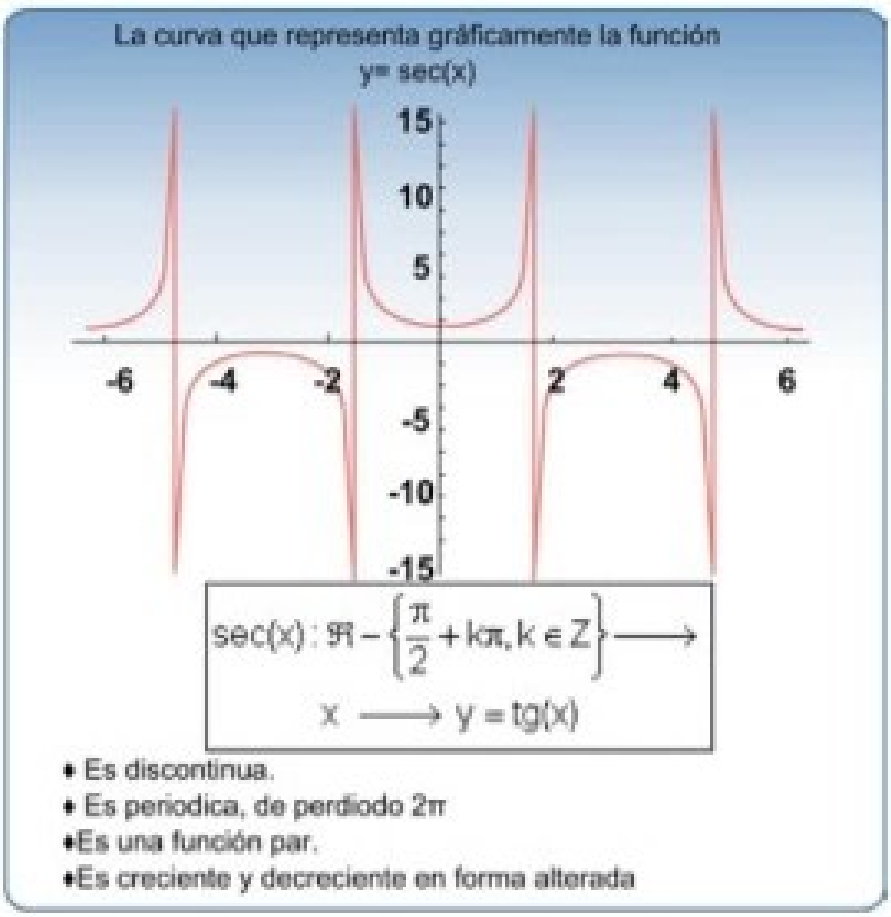
$$tg(x): \Re - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\} \longrightarrow$$
$$x \longrightarrow y = tg(x)$$

- Es discontinua $\Re$
- Es periodica, de perdiodo π
- Es una función impar.
- Es estrictamente creciente en todo su dominio

Cotangentoide



Secantoide



Ley fundamental de la trigonometría

$$\mathbf{sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1}$$

Dicha ley proviene del Teorema de Pitágoras.

Sea un triángulo rectángulo ABC recto en C, de lados a, b y c, tenemos que el Sen(A) = a/c y Cos(A) = b/c

Por Pitágoras tenemos que: $a^2 + b^2 = c^2$, dividiendo entre c^2 tenemos:

$(a^2)/(c^2) + (b^2)/(c^2) = (c^2)/(c^2)$

$(a/c)^2 + (b/c)^2 = 1$

$Sen^2(A) + Cos^2(A) = 1$

Como el ángulo fue elegido arbitrariamente, $Sen^2(x) + Cos^2(x) = 1$, para todo x Real.

$$\mathbf{1 + cotg^2\,\alpha = cosec^2\,\alpha}$$

$$\mathbf{tg^2\,\alpha + 1 = sec^2\,\alpha}$$

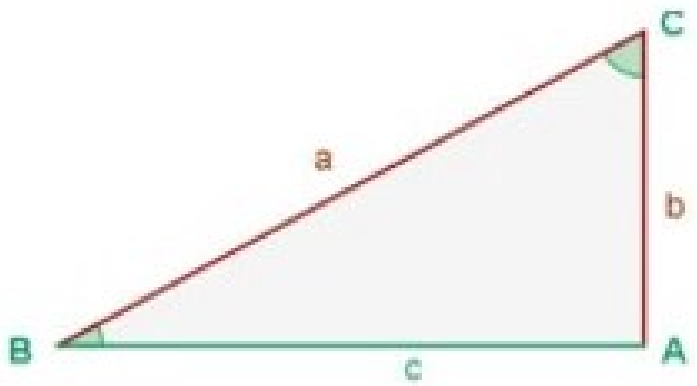
Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo consiste en hallar sus lados, ángulos y área.

Para resolver un triángulo rectángulo se necesita conocer dos lados del triángulo, o bien, un lado y un ángulo distinto del recto.

Dependiendo de los elementos que conozcamos, nos encontramos con cuatro tipos de resolución de triángulos rectángulos:

1- Se conocen la hipotenusa y un cateto

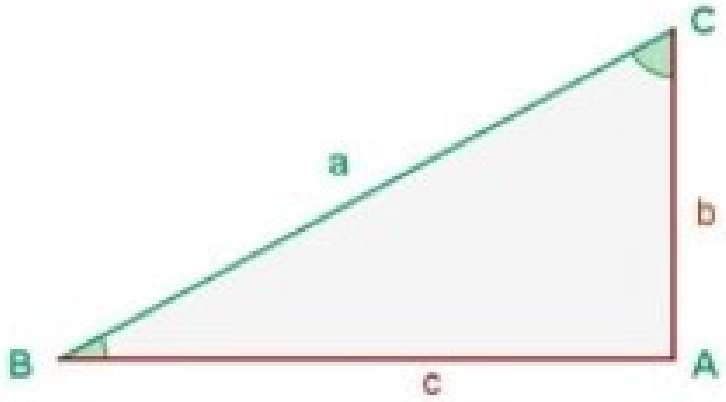


$$B:\ \operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \qquad B = \operatorname{arc\,sen}\frac{b}{a}$$

$$C = 90^\circ - B$$

$$c:\ \begin{cases} \cos B = \dfrac{c}{a} & c = a \cdot \cos B \\ & c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$

2- Se conocen los dos catetos

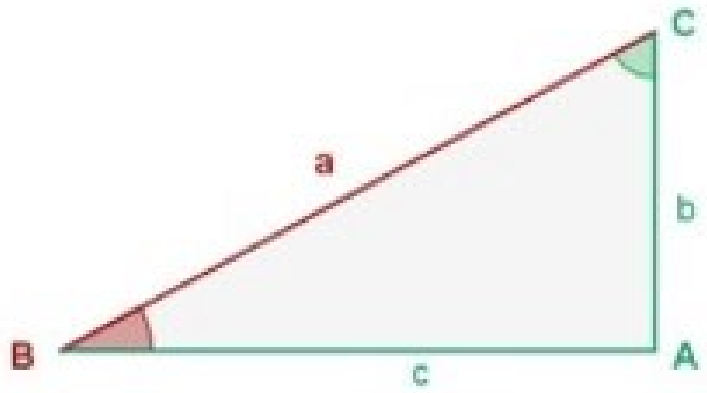


$$B:\ \operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \qquad B = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{c}$$

$$C = 90° - B$$

$$a:\ \begin{cases} \operatorname{sen} B = \dfrac{b}{a} & a = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} \\ a = \sqrt{b^2 + c^2} \end{cases}$$

3- Se conocen la hipotenusa y un ángulo agudo



$$C = 90° - B$$

$$b:\ \operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \qquad b = a \cdot \operatorname{sen} B$$

$$c:\ \begin{cases} \cos B = \dfrac{c}{a} & c = a \cdot \cos B \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$

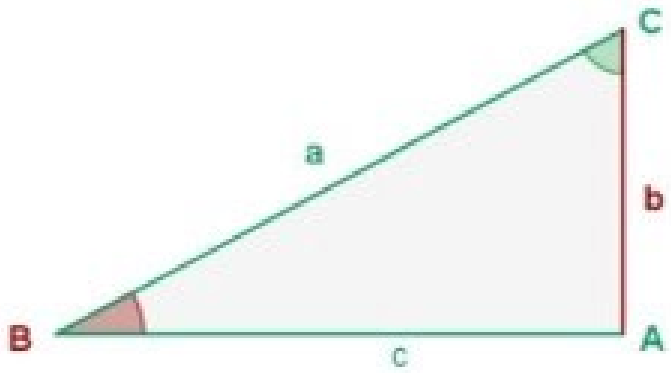
$$C = 90° - B$$

$$a:\ \operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \qquad a = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

$$c:\ \begin{cases} \operatorname{cotg} B = \dfrac{c}{b} & c = b \cdot \operatorname{cotg} B \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$

ArquiMática

4. Se conocen un cateto y un ángulo agudo



$$C = 90° - B$$

$$a:\ \operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \qquad a = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

$$c:\ \begin{cases} \operatorname{cotg} B = \dfrac{c}{b} & c = b \cdot \operatorname{cotg} B \\ & c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$

Ejercicios

De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 415 m y b = 280 m. Resolver el triángulo.

sen B = 280/415 = 0.6747 B = arc sen 0.6747 = 42° 25′

C = 90° - 42° 25′ = 47° 35′

c = a cos B c = 415 · 0.7381 = 306. 31 m

De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 33 m y c = 21 m. Resolver el triángulo.

tg B = 33/21 = 1.5714 B = 57° 32′

C = 90° - 57° 32′ = 32° 28′

a = b/sen B a = 33/0.5437 = 39.12 m

De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 45 m y B = 22°. Resolver el triángulo

C = 90° - 22° = 68°

b = a sen 22° b = 45 · 0.3746 = 16.85 m

c = a cos 22° c = 45 · 0.9272 = 41.72 m

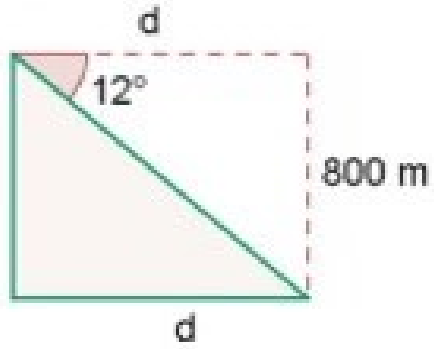
De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 5.2 m y B = 37°. Resolver el triángulo

C = 90° - 37° = 53°

a = b/sen B a = 5.2/0.6018 = 8.64 m

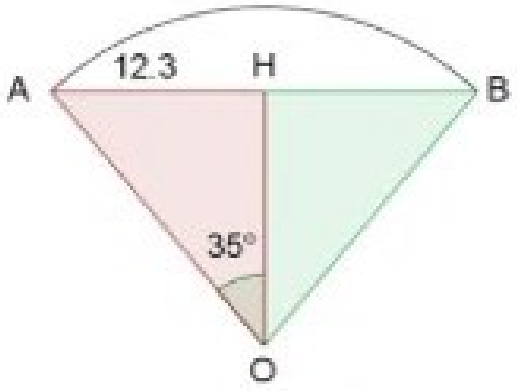
c = b · cotg B c = 5.2 · 1.3270 = 6. 9 m

Un dirigible que está volando a 800 m de altura, distingue un pueblo con un ángulo de depresión de 12°. ¿A qué distancia del pueblo se halla?



$$tg\,12° = \frac{800}{d} \qquad d = 3763.70\ m$$

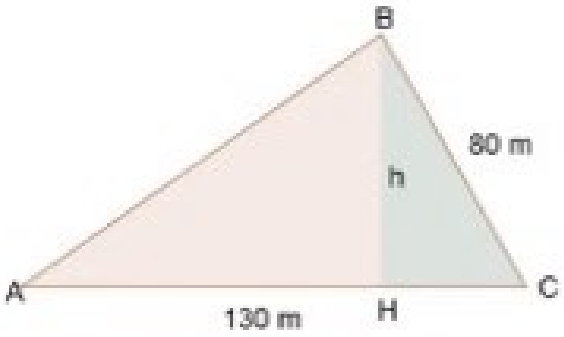
Hallar el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda de 24.6 m tiene como arco correspondiente uno de 70°



$$sen\,35° = \frac{12.3}{OA}$$

$$OA = \frac{12.3}{sen\,35°} = 21.44\ cm$$

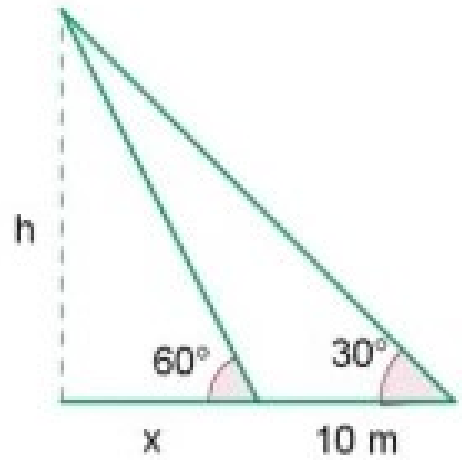
Calcular el área de una parcela triangular, sabiendo que dos de sus lados miden 80 m y 130 m, y forman entre ellos un ángulo de 70°.



$$h = 80 \cdot sen\,70°$$

$$A = \frac{130 \cdot 80 \cdot sen\,70°}{2} = 4886.40 m^2$$

Calcular la altura de un árbol, sabiendo que desde un punto del terreno se observa su copa bajo un ángulo de 30° y si nos acercamos 10 m, bajo un ángulo de 60°.



$$tg\,30° = \frac{h}{10+x} \qquad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{10+x}$$

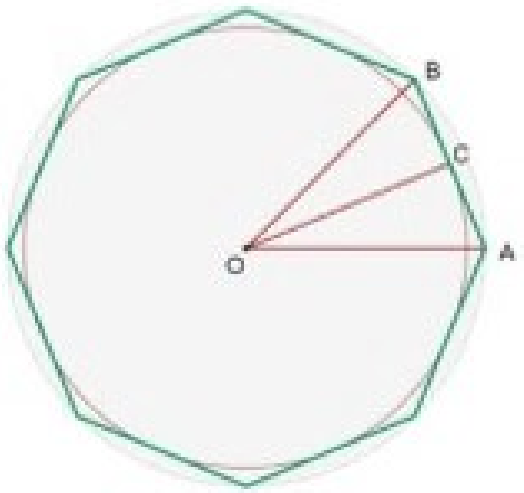
$$tg\,60° = \frac{h}{x} \qquad \sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$10\sqrt{3} + \sqrt{3}x = 3h$$

$$-\sqrt{3}x = -h$$

$$10\sqrt{3} = 2h \qquad h = 5\sqrt{3}$$

La longitud del lado de un octógono regular es 12 m. Hallar los radios de la circunferencia inscrita y circunscrita.



$$O = \frac{360°}{8} = 45° \qquad \frac{O}{2} = 22°30'$$

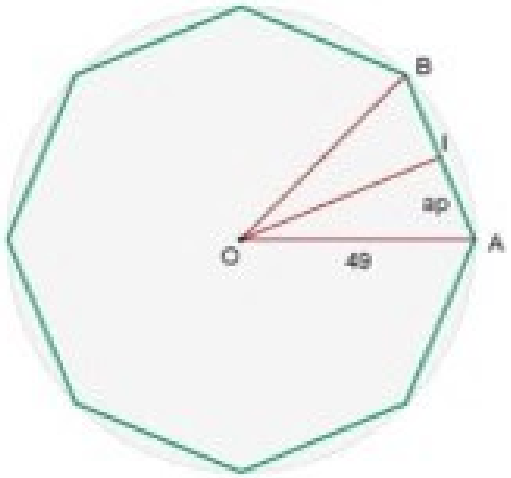
Radio de la circunferencia inscrita:

$$OC = \frac{AC}{tg\,22°30'} \qquad OC = \frac{6}{0.4142} = 14.49$$

Radio de la circunferencia circunscrita:

$$OA = \frac{AC}{sen\,22°30'} \qquad OC = \frac{6}{0.3827} = 15.68$$

Calcular la longitud del lado y de la apotema de un octógono regular inscrito en una circunferencia de 49 centímetros de radio.

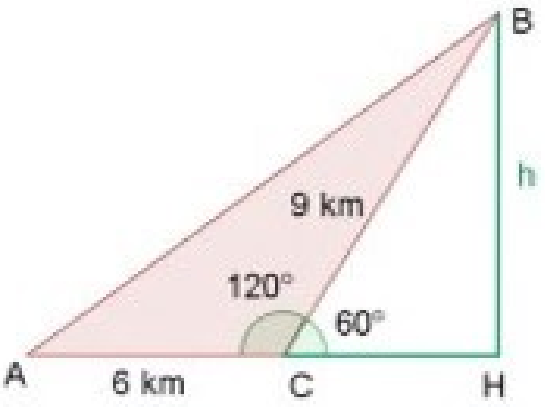


$$O = \frac{360°}{8} = 45° \qquad \frac{O}{2} = 22°30'$$

$$\frac{l}{2} = 49 \cdot sen\,22°30' = 18.75 \quad l = 37.50 \text{ cm}$$

$$ap = 49 \cdot \cos 22°30' = 45.27 \text{ cm}$$

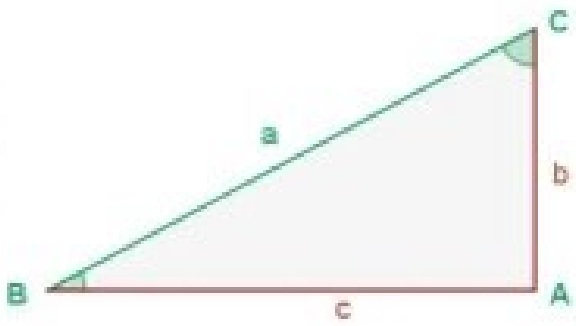
Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras. La distancia de A C es 6 km y la de B a C 9 km. El ángulo que forman estas carreteras es 120°. ¿Cuánto distan A y B?



$$CH = 9\cos 60° \qquad BH = 9sen\,60°$$

$$AB = \sqrt{(6 + 9\cos 60°)^2 + (9sen\,60°)^2} = 13.077\ km$$

Teorema: Sea ABC un triángulo rectángulo en A, cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre la hipotenusa. La altura es media proporcional entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.



Demostración: Si en el triángulo ABC trazamos desde el ángulo recto A, la altura H_a sobre la hipotenusa BC (que queda dividida en 2 segmentos n y m), tendremos que los triángulos ABC y H_aAC son semejantes y los lados homólogos son proporcionales, tendremos que:

$$a / b = b / m, \text{ de donde } \mathbf{a\ m = b^2}$$
$$\text{Análogamente } \mathbf{c^2 = a\ n.}$$

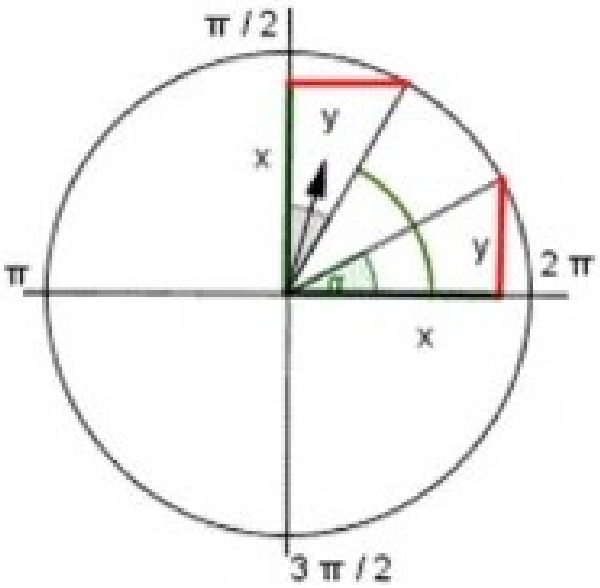
Como los triángulos son semejantes al BAC, serán semejantes entre sí, y tendremos que:

$$m / h = h / n$$
$$\mathbf{h^2 = m\ n}$$

Razones trigonométricas de ángulos complementarios y suplementarios
Ángulos suplementarios, complementarios y opuestos

Relacionar las razones trigonométricas de ángulos complementarios, suplementarios y opuestos con ángulos del primer cuadrante.

Primer cuadrante $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ángulos complementarios $90^\circ - \alpha$



$\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
$\cos(90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$
$\tan(90^\circ - \alpha) = 1 / \tan \alpha$

Ejemplo razones ángulos complementarios

Sabiendo que $\operatorname{sen} 25^\circ = 0{,}423$ y $\cos 25^\circ = 0{,}906$, hallar las razones trigonométricas de 65°.

Calculamos el valor del ángulo α y aplicamos las equivalencias.

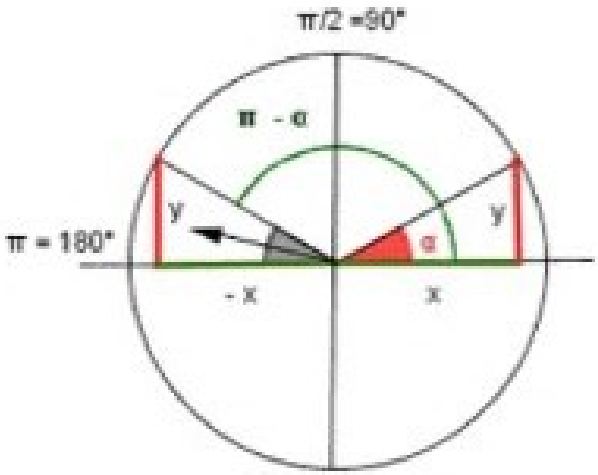
$90^\circ - \alpha = 65^\circ \quad \alpha = 90^\circ - 65^\circ \quad \alpha = 25^\circ$

sen 65° = cos 25° = 0,906
cos 65° = sen 25 ° = 0,423
tan 65° = 1 /tan 25 °= 2, 145

Segundo cuadrante 90° < α < 180° ángulos suplementarios 180° - α

Para obtener las equivalencias entre los cuadrantes, relacionamos las razones trigonométricas de un ángulo α del primer cuadrante con el resto de los cuadrantes. En las figuras leemos mirando por donde indica la flecha, en cada uno de los cuadrantes.

Ángulos del segundo cuadrante
Leemos en la figura las razones de α y de 180° - α
sen α = y seno (180° - α) = y
sen (180° - α) = sen α



sen (180° - α) = sen α
cos (180° - α) = - cos α
tan (180° - α) = - tan α

Ejemplo de razones de ángulos suplementarios
Hallar el seno, el coseno y la tangente de 135°.

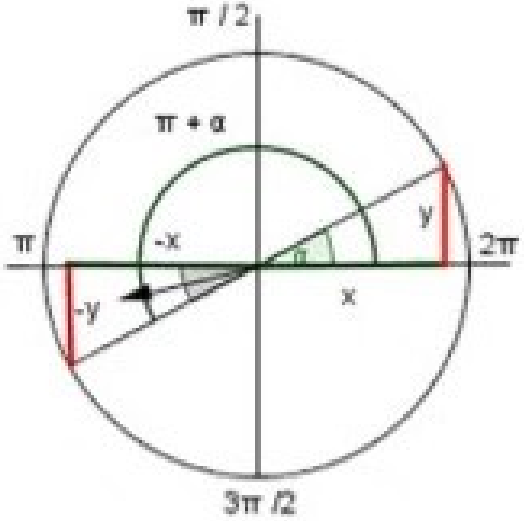
Calculamos el valor del ángulo α correspondiente al primer cuadrante y aplicamos las equivalencias.
180° - α = 135° ⇒ α = 180° - 135 ° ⇒ α = 45°

$$\text{sen } 135° = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

tan 135° = - tan 45° = - 1

Tercer cuadrante $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ difieren en 180°



$\operatorname{sen}(180^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$
$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$
$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan\alpha$

Hallar el seno, coseno y la tangente de 210°.

Calculamos el valor del ángulo α correspondiente al primer cuadrante y aplicamos las equivalencias.

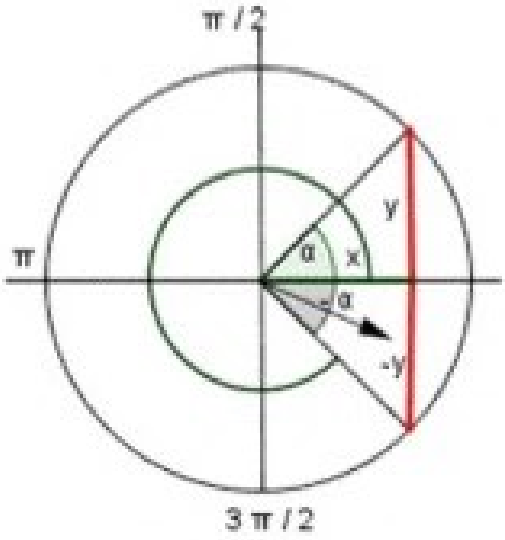
$180^\circ + \alpha = 210^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

$\operatorname{sen} 210^\circ = -\operatorname{sen} 30^\circ = -1/2$

$\cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 210^\circ = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Cuarto cuadrante $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ ángulos opuestos $-\alpha$ o $360^\circ - \alpha$



$\operatorname{Sen}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$
$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha$
$\tan(360^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$

Hallar el seno, coseno y la tangente de 315°.

Calculamos el valor del ángulo α correspondiente al primer cuadrante y aplicamos las equivalencias.

$360° - \alpha = 315° \Rightarrow \alpha = 360° - 315° \Rightarrow \alpha = 45°$

$\operatorname{sen} 315° = -\operatorname{sen} 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 315° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 315° = -\tan 45° = -1$

1. Sabiendo que $\cos \alpha = -3/5$ y que $180° < \alpha < 270°$ calcula el seno y la tangente.

Estamos en el tercer cuadrante, ver ángulos que difieren en 180°.

1º Utilizamos la ecuación fundamental para obtener el seno.

$\operatorname{sen} \alpha = \pm\sqrt{1-(-3/5)^2} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm\sqrt{1 - 9/25}$

$\operatorname{sen} \alpha = \pm\sqrt{16/25} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -4/5$

*** En el tercer cuadrante el seno es negativo, nos quedamos con la solución negativa.

2º Calculamos la tangente.

$\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \tan \alpha = \frac{-4/5}{-3/5} \rightarrow \tan \alpha = \frac{4}{3}$

2. Expresa las siguientes razones trigonométricas en función de un ángulo del primer cuadrante.

a) $\operatorname{sen} 870°$ b) $\cos(-30°)$

a) $\operatorname{sen} 870°$

Es un ángulo mayor de 360°. Calculamos el número de vueltas.

Dividimos $870°/360° = 2{,}416$ dos vueltas completas y

0,416 partes de vuelta. $0{,}416 \cdot 360° = 150°$.

Calculamos el seno de 150°, es un ángulo del segundo cuadrante, ver ángulos suplementarios.

$\operatorname{sen}(180° - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$

$\operatorname{sen}(180° - 150°) = \operatorname{sen} 30° = 1/2 \rightarrow \operatorname{sen} 150° = 1/2$

$\operatorname{sen} 870° = \operatorname{sen} 150° = 1/2$

b) $\cos(-30°)$

Es un ángulo del cuarto cuadrante.

Son ángulos opuestos $-\alpha$ o $(360° - \alpha)$

El coseno de $(-30°)$ es lo mismo que el coseno de $(360° - 30°)$.

$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

$\cos(-30°) = \cos 30 = \sqrt{3}/2 \rightarrow \cos(-30°) = \sqrt{3}/2$

3. Calcula el seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos:
   a) 120º b) 240º c) – 60º

a) $\operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = \sqrt{3}/2$
   $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -1/2$
   $\tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

b) $\operatorname{sen} 240^\circ = -\operatorname{sen} 60^\circ = -\sqrt{3}/2$
   $\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -1/2$
   $\tan 240^\circ = \tan 60 = \sqrt{3}$

c) $\operatorname{sen}(-60) = -\operatorname{sen} 60 = -\sqrt{3}/2$
   $\cos(-60) = \cos 60 = 1/2$
   $\tan(-60) = -\tan 60 = -\sqrt{3}$

4. Sabiendo que $\tan\alpha = 1,2$ halla el seno y el coseno si el ángulo está:
   a) en el primer cuadrante.
   b) en el tercer cuadrante.

Hallamos el coseno usando la fórmula $\Rightarrow \tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$(1,2)^2 + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 2,44$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2,44}} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\ 0,64$

Hallamos el seno usando $\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha$

a) El ángulo está en el primer cuadrante.
   Nos fijamos en el signo para las soluciones.
   $\cos\alpha = +0,64 \rightarrow \operatorname{sen}\alpha = 1,2 \cdot 0,64 = 0,768$

b) El ángulo está en el tercer cuadrante.
   $\cos\alpha = -0,64 \rightarrow \operatorname{sen}\alpha = 1,2 \cdot (-0,64) = -0,768$

5. Si $\operatorname{sen}\alpha = -3/5$ y $\cos\alpha < 0$ calcula:
   a) $\cos(\pi + \alpha)$ b) $\operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha)$ c) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$

Funciones trigonométricas de ángulos notables

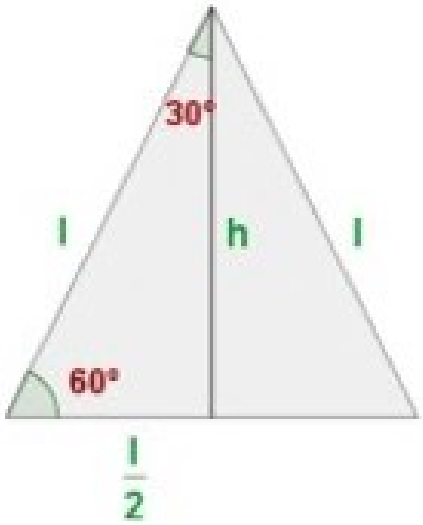
Los ángulos notables del primer cuadrante son los ángulos de 0º 30º 45º 60º y 90º. Los que difieren 90º 180º y 270º son los ángulos notables de los otros cuadrantes.

Funciones de ángulos frontera

	0º	90º	180º	270º	360º
seno	0	1	0	-1	0
coseno	1	0	-1	0	1
tangente	0	∞	0	∞	0
cotangente	∞	0	∞	0	∞
secante	1	∞	-1	∞	1
cosecante	∞	1	∞	-1	∞

Seno, coseno y tangente de 30º y 60º

Si dibujamos un triángulo equilátero ABC, cada uno de sus tres ángulos mide 60º y, si trazamos su altura h, el ángulo del vértice A por el que la hemos trazado queda dividido en dos iguales de 30º cada uno. Recurriendo al teorema de Pitágoras, tenemos que la altura es:



$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2} \qquad \text{sen } 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

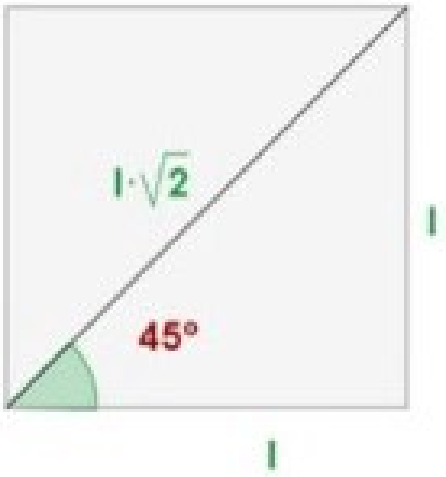
$$\cos 30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{tg } 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Seno, coseno y tangente de 45º

En un cuadrado de lado l, trazamos la diagonal,

$$d = \sqrt{l^2+l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$$



$$\text{sen } 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

Razones trigonométricas de ángulos notables

α:	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\to\infty$	0	$\to-\infty$

Completar la siguiente tabla

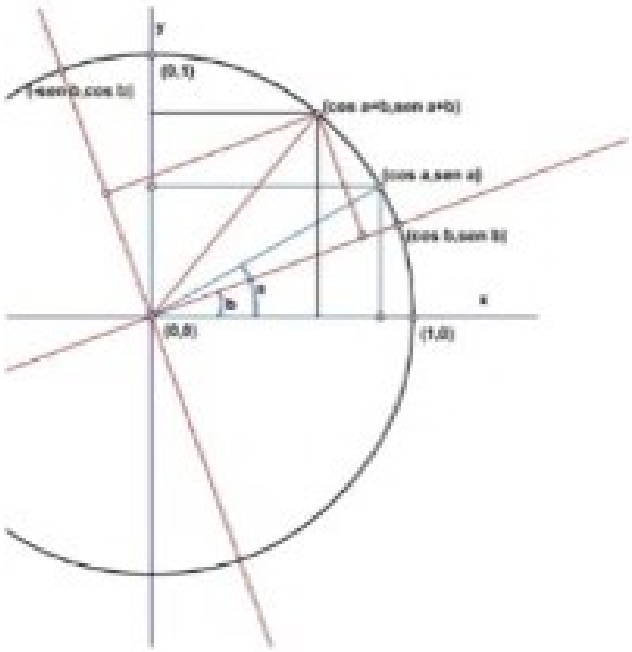
FUNCIONES DE ÁNGULOS NOTABLES

FUNCIÓN	SEN.	COS.	TANG.	COTG.	SEC.	COSEC.
0°	**0,0000**	**1,0000**	**0,0000**	**INF**	**1,0000**	**INF**
30°	0,5000	0,8660	0,5773	1,7320	1,1547	2,0000
45°	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	1,4142	1,4142
60°	0,8660	0,5000	1,7320	0,5773	2,0000	1,1547
90°	**1,0000**	**0,0000**	**INF**	**0,0000**	**INF**	**1,0000**
120°						
135°						
150°						
180°						
210°						
225°						
240°						
270°						
300°						
315°						
330°						
360°						

Sean a y b ángulos del primer cuadrante, vamos a ver que:

$$Sen(a+b) = sen(a)\cos(b) + sen(b)\cos(a)$$

El seno y el coseno de la suma de ángulos



Introducción

Haciendo uso del hecho de que a cada punto del plano le corresponde un vector y de que los vectores se suman según la regla del paralelogramo, vamos a demostrar las fórmulas para el seno y el coseno de la suma de dos ángulos en función de los senos y cosenos de cada uno de ellos. Concretamente vamos a demostrar las siguientes igualdades:

$$sen(a+b) = sen(a)cos(b) + cos(a)sen(b)$$

$$cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)$$

Demostración

La recta por el origen que hace un ángulo a con el eje X corta al círculo con centro en el origen y radio unidad en un punto de coordenadas $(\cos(a), \text{sen}(a)) = \cos(a)(1,0) + \text{sen}(a)(0,1)$, por definición de seno y coseno.

Si rotamos los puntos del plano alrededor del origen un ángulo b, el punto $(1,0)$ se mueve a la posición $(\cos(b), \text{sen}(b))$, y el punto $(0,1)$ se mueve a la posición $(-\text{sen}(b), \cos(b))$ (ver figura).

Por lo tanto, un punto cualquiera $(x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1)$ se mueve a la posición $x \cdot (\cos(b), \text{sen}(b)) + y \cdot (-\text{sen}(b), \cos(b))$.

En particular el punto $(\cos(a), \text{sen}(a))$ se mueve a la posición $cos(a) \cdot (cos(b), sen(b)) + sen(a) \cdot (-sen(b), cos(b))$, que al multiplicar nos queda: $(cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b), cos(a)sen(b) + sen(a)cos(b))$.

Pero el punto $(\cos(a + b), \text{sen}(a + b))$ se mueve claramente con la rotación a la posición $sen(a + b) = sen(a)cos(b) + cos(a)sen(b)$.

De donde, igualando coordenadas, resultan las dos fórmulas:

$$sen(a + b) = sen(a)cos(b) + cos(a)sen(b)$$
$$cos(a + b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)$$

La restricción no quita generalidad a la fórmula pues siempre podemos reducir los ángulos del segundo, tercer y cuarto cuadrante al primero.

Ejercicio: Calcula el seno de 75º sin ayudarte de la calculadora.

Seno de la diferencia de dos ángulos

Cambiando b por -b, nos queda

$$sen(a-b) = sen(a)\,cos(-b) + sen(-b)\,cos(a) =$$
$$= sen(a)\,cos(b) - sen(b)\,cos(a)$$

$$sen(a-b) = sen(a)\,cos(b) - sen(b)\,cos(a)$$

Ejercicio: Calcula el seno de 15º sin ayudarte de la calculadora.

Coseno de la suma de dos ángulos

Sabemos que cos(a)=sen (90º-a), asi que utilizando la fórmula anterior del seno y esta relación podemos obtener:

$$cos(a+b) = sen(90º-(a+b)) = sen((90º-a)+(-b)) = sen(90º-a)cos(-b) + cos(90º-a)sen(-b) =$$
$$= cos(a)\,cos\,(b) + sen(a).\,(-senb) =$$
$$= cos(a)\,cos\,(b) - sen(a).\,sen(b)$$
$$\mathbf{cos(a+b) = cos(a)\,cos(b) - sen(a)\,sen(b)}$$

Coseno de la diferencia de dos ángulos

Para obtener la fórmula podemos proceder como en el apartado anterior:

$$\mathbf{cos(b-a) = cosbcosa + senbsena}$$

Ejercicio: Prueba que si α, β y γ son los ángulos de un triángulo se verifica: $\cos(\alpha - \beta) - \cos\gamma = 2\cos\alpha\cos\beta$

Tangente de la suma y diferencia de dos ángulos

Deducir las siguientes fórmulas:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + \beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$$

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$$

Ejercicio: Prueba que si α, β y γ son los ángulos de un triángulo se verifica: $tg(\alpha + \beta) + tg(\gamma) = 0$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE Y MITAD

En las fórmulas de la suma de dos ángulos hacemos **α=β** o a=b, para obtener:

$$cos(2a)=cos(a+a)=cosacosa-senasena=$$

$$=cos^2a-sen^2a$$

sen(2a)=sen(a+a) = sen(a) cos(a) + sen(a) cos(a) =2 sen a cos a

$$tg(2 \cdot \alpha) = \frac{2 \cdot tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

Ejercicio: Halla las razones trigonométricas del ángulo 120º.

Razones trigonométricas del ángulo mitad

Sabemos que $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - \text{sen}^2 x$ y despejando el $\text{sen}^2 x$ y el $\cos^2 x$, obtenemos:

$$cos^2x = \frac{1+cos(2x)}{2}$$

y

$$sen^2x = \frac{1-cos(2x)}{2}$$

Si hacemos $2x=t$, tendremos:

$$\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{1+\cos(t)}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{t}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos(t)}{2}}$$

y el signo que le asignaremos dependerá del cuadrante donde se encuentre $t/2$.
Análogamente:

$$sen^2\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{1-\cos(t)}{2} \Rightarrow sen\left(\frac{t}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(t)}{2}}$$

Veamos la fórmula de la tangente del ángulo mitad, para obtenerla basta aplicar las dos anteriores:

$$tg\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{sen(t/2)}{\cos(t/2)}=\pm\sqrt{\frac{\frac{1-\cos(t)}{2}}{\frac{1+\cos(t)}{2}}}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(t)}{1+\cos(t)}}$$

Ejemplo 1: Calcula la $tg\,(15^o)$
Solución: Como 15° pertenece al primer cuadrante su signo será +.

$$tg\,(15^o)=\sqrt{\frac{1-\cos(30^o)}{1+\cos(30^o)}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{2^2-(\sqrt{3})^2}}=2-\sqrt{3}$$

Ejercicio: Halla las razones trigonométricas de $22^o\ 30'$.

Transformaciones de sumas y diferencias en productos

A veces en la resolución de ecuaciones e incluso en la integración de funciones trigonométricas conviene transformar las sumas en productos o los productos en sumas.

Consideramos \sen A±\sen B y vamos a transformarlo en un producto, para ello hacemos

$$A=\alpha+\beta$$
$$B=\alpha-\beta$$

Sistema que tiene por solución A=[(α+β)/2] y B=[(α-β)/2] (basta sumar y restar las ecuaciones para obtener la solución).

$$sen\ A+sen\ B=sen\ (\alpha+\beta) = sen\alpha cos\beta+sen\beta cos\alpha$$

$$sen\ A-sen\ B=sen\ (\alpha-\beta) = sen\alpha cos\beta-sen\beta cos\alpha$$

sumando y restando las dos ecuaciones, se obtiene:

$$sen\ (\alpha+\beta)+sen\ (\alpha-\beta)=sen\alpha cos\beta+sen\beta cos\alpha+ sen\alpha cos\beta-sen\beta cos\alpha = 2\ sen\alpha cos\beta$$

$$sen\ (\alpha+\beta)-sen\ (\alpha-\beta)=sen\alpha cos\beta+sen\beta cos\alpha- sen\alpha cos\beta+sen\beta cos\alpha = 2\ sen\beta cos\alpha$$

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \beta \cos \alpha = 2 \operatorname{sen} \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}$$

Procedemos de forma análoga para obtener la suma y diferencia de cosenos:

$$\cos\alpha + \cos B = \operatorname{Cos}(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta =$$
$$= 2\cos\alpha\cos\beta = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos B = \operatorname{Cos}(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta - \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta =$$
$$= -2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = -2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$

Resumiendo:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}$$

$$\cos A+\cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

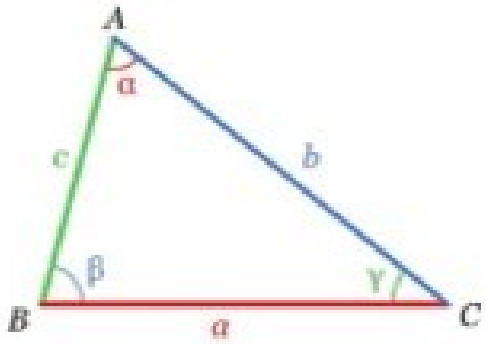
$$\cos a-\cos B = -2\,\text{sen}\frac{A+B}{2}\,\text{sen}\frac{A-B}{2}$$

Ejemplo: Transformar en producto *sen* $3x$ + *sen* x
Solución:

$$sen(3x)+sen(x)=2\,sen\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}=2\,sen\frac{4x}{2}\cos\frac{2x}{2}=2\,sen(2x)\cos(x)$$

Ejercicio: Transformar *cos (2x)-cos (6x)* en producto.

Teorema del seno



$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha}=\frac{b}{\text{sen}\,\beta}=\frac{c}{\text{sen}\,\gamma}$$

En trigonometría, el teorema del seno es una relación de proporcionalidad entre las longitudes de los lados de un triángulo y los senos de los ángulos respectivamente opuestos.

Usualmente se presenta de la siguiente forma:

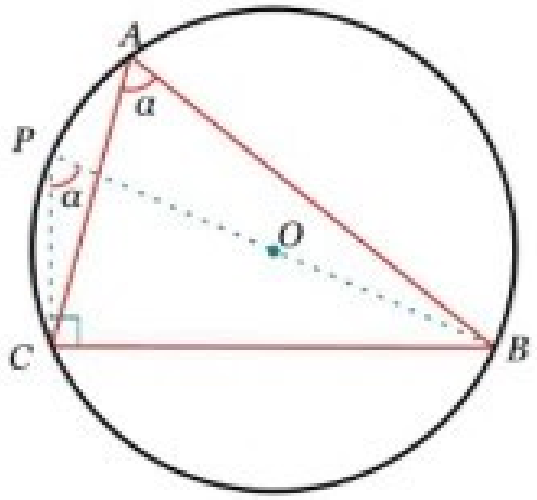
Teorema del seno

Si en un triángulo ABC, las medidas de los lados opuestos a los ángulos A, B y C son respectivamente a, b, c, entonces:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

Demostración

A pesar de ser de los teoremas trigonométricos más usados y de tener una demostración particularmente simple, es poco común que se presente o discuta en cursos de trigonometría, de modo que es poco conocido.



El teorema de los senos establece que *a/sin(A)* es constante.

Dado el triángulo *ABC*, denotamos por *O* su circuncentro y dibujamos su circunferencia circunscrita. Prolongando el segmento *BO* hasta cortar la circunferencia, se obtiene un diámetro *BP*.

Ahora, el triángulo *PCB* es recto, puesto que *BP* es un diámetro, y además los ángulos *A* y *P* son iguales, porque ambos son ángulos inscritos que abren el segmento *BC* (Véase definición de arco capaz). Por definición de la función trigonométrica seno, se tiene

$$sin\ A = sin\ P = \frac{BC}{BP} = \frac{a}{2R}$$

donde *R* es el radio de la circunferencia. Despejando *2R* obtenemos:

$$\frac{a}{sin\ A} = 2R$$

Repitiendo el procedimiento con un diámetro que pase por *A* y otro que pase por *C*, se llega a que las tres fracciones tienen el mismo valor *2R* y, por tanto, son iguales.

La conclusión que se obtiene suele llamarse teorema de los senos generalizado y establece:

Para un triángulo *ABC* donde *a, b, c* son los lados opuestos a los ángulos *A, B, C* respectivamente, si *R* denota el radio de la circunferencia circunscrita, entonces:

$$\frac{a}{sin\ A} = \frac{b}{sin\ B} = \frac{c}{sin\ C} = 2R$$

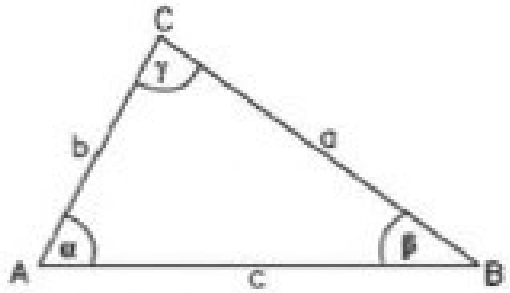
Puede enunciarse el teorema de una forma alternativa:

En un triángulo, el cociente entre cada lado y el seno de su ángulo opuesto es constante e igual al diámetro de la circunferencia circunscrita.

Teorema del coseno (Teorema general de Pitágoras)

Un nuevo teorema: "En cualquier triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de estos dos lados por el coseno del ángulo que forman".

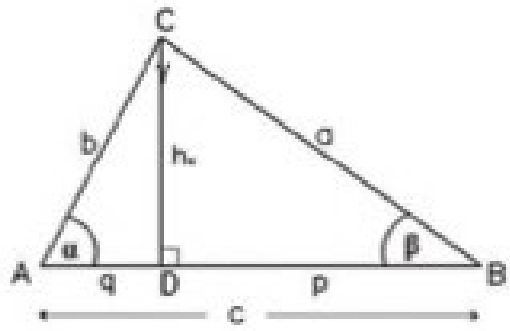
O sea, utilizando la siguiente figura con sus elementos queda así:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ac \cos \gamma$$

Demostrar si es verdad.

Comenzamos trazando la altura h_c del triángulo ABC dado y designamos por p y q los segmentos formados por esta altura.



Si observamos bien, en el triángulo DBC obtenemos, por Pitágoras, obviamente, que:

$h_c^2 + p^2 = a^2$, o sea:

$h_c^2 = a^2 - p^2$

mientras que en el triángulo ADC determinamos que:

$h_c^2 + q^2 = b^2$, o sea:

$h_c^2 = b^2 - q^2$

Estos pasos nos llevan a la conclusión que $a^2 - p^2 = b^2 - q^2$, lo que implica que

$a^2 = b^2 - q^2 + p^2$

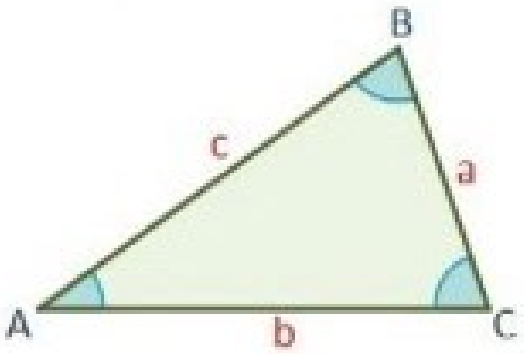
pero $p = c - q$, lo que al reemplazar en la expresión anterior permite obtener que:
$a^2 = b^2 - q^2 + (c - q)^2$,

desarrollando resulta $a^2 = b^2 - q^2 + c^2 - 2cq + q^2$, simplificando:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq$, pero $\cos a = q/b$ de donde $q = b \cos a$.

Luego $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos a$

Teorema de la tangente

El teorema de la tangente relaciona las longitudes de dos lados de un triángulo con las tangentes de los dos ángulos opuestos a estos. Este enuncia que:



La razón entre la suma de dos lados (a, b o c) de un triángulo y su resta es igual a la razón entre la tangente de la media de los dos ángulos opuestos a dichos lados y la tangente de la mitad de la diferencia de estos.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tan\left[\frac{A+B}{2}\right]}{tan\left[\frac{A-B}{2}\right]}$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{tan\left[\frac{A+C}{2}\right]}{tan\left[\frac{A-C}{2}\right]}$$

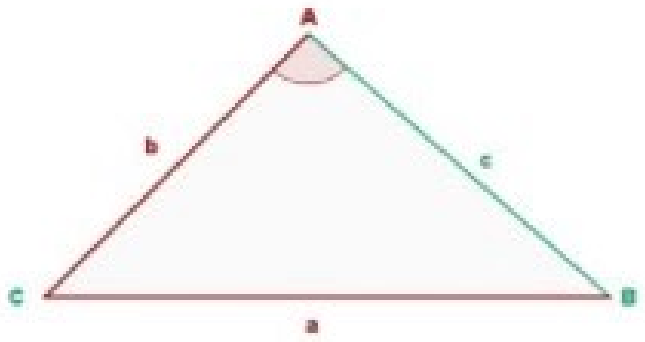
$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{tan\left[\frac{B+C}{2}\right]}{tan\left[\frac{B-C}{2}\right]}$$

siendo a, b y c los lados y A, B y C los ángulos del triangulo

Desafío: Demostrar el teorema de la tangente a partir del teorema de seno y del factoreo (transformación en producto)

Resolución de triángulos oblicuángulos

1. Resolver un triángulo conociendo dos lados y un ángulo opuesto.

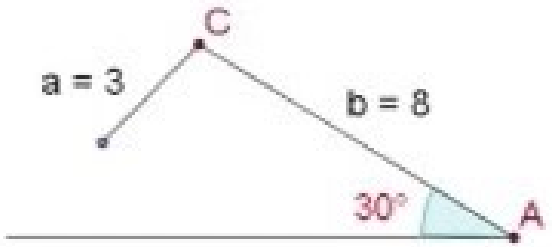


$$\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B} \quad Si:$$

Si sen B > 1. No hay solución
Si sen B = 1 Triángulo rectángulo
Si sen B < 1. Una o dos soluciones

Supongamos que tenemos a, b y A; al aplicar el teorema de los senos puede suceder:

1.1– sen B > 1. No hay solución.
Ejemplo:
Resuelve el triángulo de datos: A = 30°, a = 3 m y b = 8 m.



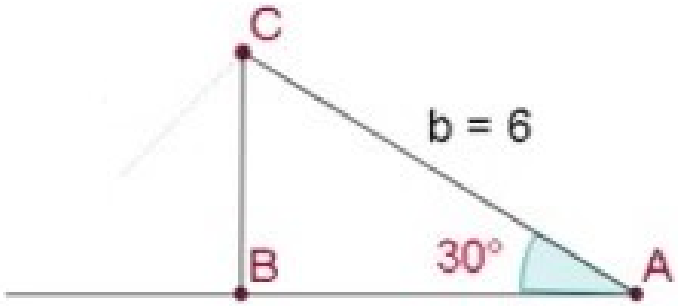
$$\frac{3}{sen\,30^\circ} = \frac{8}{sen\,B} \qquad sen\,B = \frac{4}{3} > 1$$

Como el seno de un ángulo nunca puede ser mayor que 1, el problema no tiene solución. La figura muestra la imposibilidad de que exista el triángulo planteado.

1.2– sen B = 1. Solución única: triángulo rectángulo
Ejemplo:
Resuelve el triángulo de datos: A = 30°, a = 3 m y b = 6 m.

$$\frac{3}{sen\,30^\circ} = \frac{6}{sen\,B} \qquad sen\,B = \frac{3}{3} = 1 \qquad B = 90^\circ$$

$$C = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$



$$a = 6 \cdot sen30^\circ = 3m$$

$$c = 6 \cdot \cos 30^\circ = 3\sqrt{3}m$$

1_3- sen B < 1. Una o dos soluciones

Ejemplos:

a.- Resuelve el triángulo de datos: A = 60°, a = 8 m y b = 4 m.

$$\frac{8}{sen\,60^\circ} = \frac{4}{sen\,B} \qquad sen\,B = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B = 25^\circ 40' \\ B = 180^\circ - 25^\circ 40' = 154^\circ 20' \end{cases}$$

Como a >b sólo es válida la solución: $B = 25^\circ 40'$

$$C = 180^\circ - (60^\circ + 25^\circ 40') = 94^\circ 20'$$

$$\frac{8}{sen\,60^\circ} = \frac{c}{sen\,94^\circ 20'} \quad c = 9.21m$$

b.- Resuelve el triángulo de datos: A = 30°, a = 3 m y b = 4 m.

$$\frac{3}{sen30^\circ} = \frac{4}{sen\,B} \qquad sen\,B = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B_1 = 41^\circ 48' \\ B_2 = 180^\circ - 41^\circ 48' = 138^\circ 12' \end{cases}$$

Como a < b sólo son válidas las dos soluciones

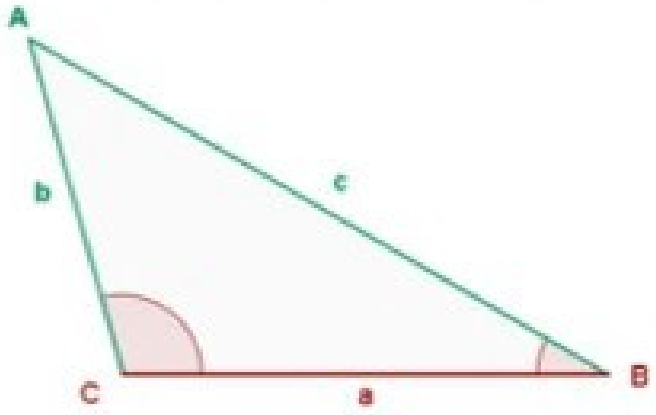
$$C_1 = 180^\circ - (30^\circ + 41^\circ 48') = 108^\circ 12'$$

$$\frac{3}{sen\,30^\circ} = \frac{c}{sen\,108^\circ 12'} \qquad c = 5.7m$$

$$C_2 = 180^\circ - (30^\circ + 138^\circ 12') = 11^\circ 48'$$

$$\frac{3}{sen\,30^\circ} = \frac{c}{sen\,11^\circ 48'} \qquad c = 1.227m$$

2. Resolver un triángulo conociendo un lado y dos ángulos adyacentes a él.



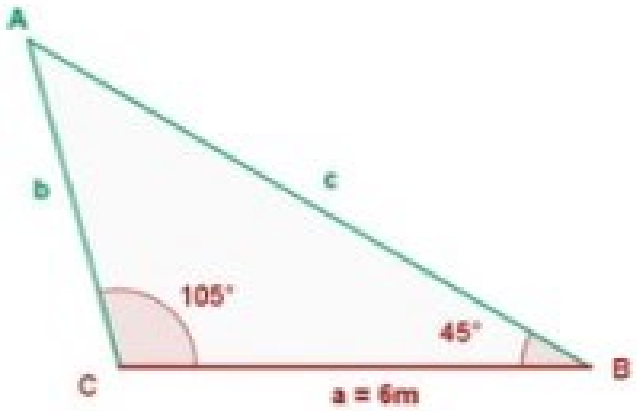
$$A = 180° - B - C$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \qquad b = a \cdot \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \qquad c = a \cdot \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

Ejemplo:

De un triángulo sabemos que: a = 6 m, B = 45° y C = 105°. Calcula los restantes elementos.

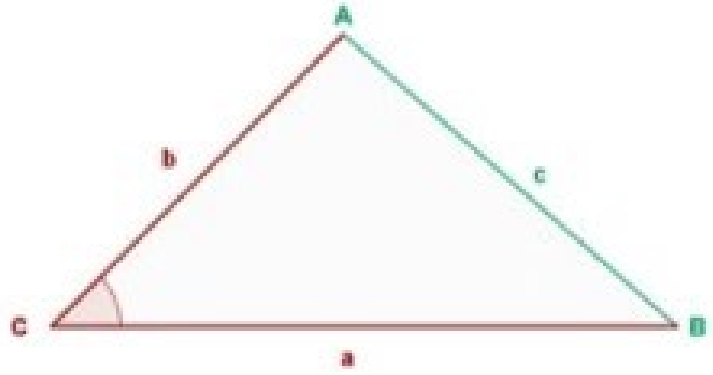


$$A = 180° - 45° - 105° = 30°$$

$$\frac{6}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{b}{\operatorname{sen} 45°} \qquad b = 6 \cdot \frac{\operatorname{sen} 45°}{\operatorname{sen} 30°} = 6 \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{2}\,m$$

$$\frac{6}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{c}{\operatorname{sen} 105°} \qquad c = 6 \cdot \frac{\operatorname{sen} 105°}{\operatorname{sen} 30°} = 11.6m$$

3.- Conociendo dos lados y el ángulo comprendido.



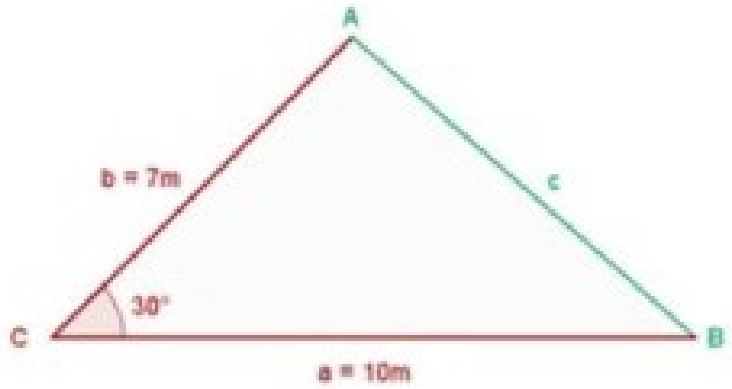
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cos C}$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \qquad \operatorname{sen} B = \frac{c \cdot \operatorname{sen} B}{b}$$

$$A = 180° - B - C$$

Ejemplo:

De un triángulo sabemos que: a = 10 m, b = 7 m y C = 30°. Calcula los restantes elementos.



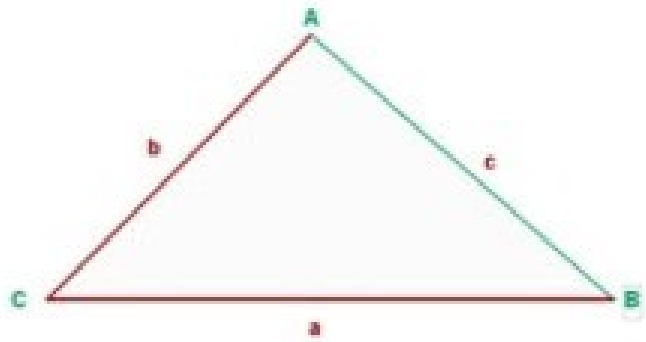
$$c = \sqrt{10^2 + 7^2 - 2 \cdot 10 \cdot 7 \cos 30°} = 5.27\,m$$

$$\frac{7}{\operatorname{sen} B} = \frac{5.27}{\operatorname{sen} 30°} \qquad \operatorname{sen} B = 0.664 \Rightarrow \begin{cases} B = 41°37'52'' \\ B = 138°22'2'' \end{cases}$$

$B = 41°37'52''$ porque al ser a>b el ángulo obtuso será A.

$$A = 180° - 30° - 41°37'52'' = 108°22'8''$$

4. Resolver un triángulo conociendo los tres lados.



$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}$$

$$C = 180^\circ - A - B$$

Ejemplos:
Resuelve el triángulo de datos: a = 15 m, b = 22 m y c = 17 m.

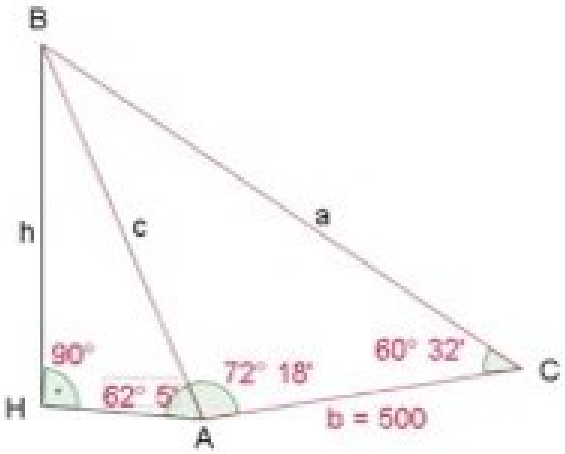
$$\cos A = \frac{484 + 289 - 225}{748} = 0.7326 \qquad A = 42°54'$$

$$\cos B = \frac{289 + 225 - 484}{510} = 0.0588 \qquad B = 86°38'$$

$$180° - 42°54' - 86°38' = 50°28' \qquad C = 50°28'$$

CÁLCULO DE LA ALTURA DE UN PUNTO DE PIE INACCESIBLE

Se miden con el teodolito los ángulos A y C. A = 72º 18' y C = 60º 32'.
También se mide el ángulo HAB = 62º 5'



ArquiMática

$$ABC = 180° - (72°18' + 60°32') = 47°10'$$

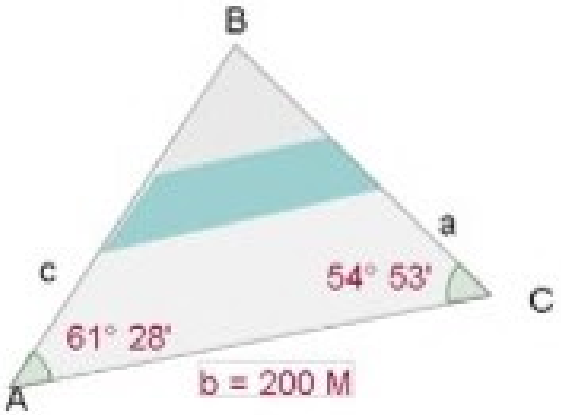
$$\frac{c}{sen\,60°32'} = \frac{500}{sen\,47°10'} \qquad c = 593.62\,m$$

$$h = 593.62 \cdot sen\,62°5' = 524.54\,m$$

Cálculo de la distancia entre dos puntos, uno de los cuales es inaccesible

Se fijan en el plano horizontal dos puntos A y C, y se mide la distancia que los separa: b= 200 m.

Se miden con el teodolito los ángulos A y C. A= 61º 28' y C= 54º 53'.



$$B = 180° - (61°28' + 54°53') = 63°39'$$

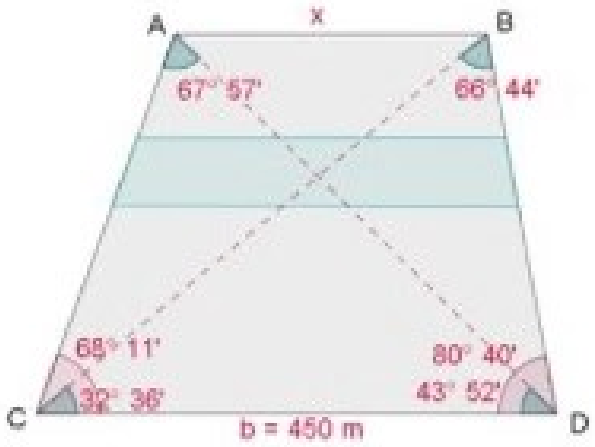
$$\frac{c}{sen\,54°53'} = \frac{200}{sen\,63°39'} \qquad c = 182.565\,m$$

Cálculo de la distancia entre dos puntos inaccesibles

Se fijan en el plano horizontal dos puntos C y D, y se mide la distancia que los separa: b= 450 m.

Se miden con el teodolito los ángulos C y D. C= 68º 11' y D= 80º 40'.

También se miden los ángulos BCD = 32º 36' y ADC = 43º 52'.



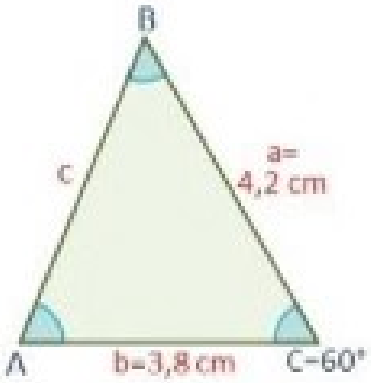
$$\frac{AC}{sen\,43°52'} = \frac{450}{sen\,67°57'} \qquad AC = 336.45m$$

$$\frac{CB}{sen\,80°40'} = \frac{450}{sen\,66°44'} \qquad CB = 483.35m$$

$$x^2 = 336.45^2 + 483.35^2 - 2 \cdot 336.45 \cdot 483.35 \cdot \cos(68°11' - 32°36')$$
$$x = 286.902m$$

Aplicaciones del teorema de la tangente

- Sabiendo un costado y dos ángulos, calcular los otros dos costados y el otro ángulo.
- Sabiendo dos costados y un ángulo, calcular el otro costado y los otros dos ángulos.



Sea un triángulo con dos costados conocidos (a=4,2 cm y b=3,8 cm) y un ángulo conocido (C=60º), se desea hallar A, B y c.

Sabiendo que la suma de los ángulos de un triángulo son 180º:

$$A + B + C = 180^o \rightarrow$$
$$A + B = 180^o - C = 180^o - 60^o = 120^o$$

Por el teorema de la tangente tenemos que:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tan\left[\frac{A+B}{2}\right]}{tan\left[\frac{A-B}{2}\right]} \rightarrow \frac{4,2+3,8}{4,2-3,8} = \frac{tan\,60^o}{tan\left[\frac{A-B}{2}\right]} \rightarrow$$

$$tan\left[\frac{A-B}{2}\right] = \frac{1,7321}{20} = 0,866 \rightarrow \frac{A-B}{2} = arctan\,0,866 = 4,94^o$$

$$\rightarrow A - B = 9,9^o$$

Por lo tanto, obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (A y B).

Se obtiene que A=64,95º y B=55,05º.

El lado c se podría hallar igualmente por el teorema de la tangente, pero, para simplificar, lo haremos por el teorema del seno.

$$\frac{a}{sen\,A} = \frac{c}{sen\,C} \rightarrow$$

$$c = \frac{a \cdot sen\, C}{sen\, A} = \frac{4{,}2 \cdot sen\, 60^\circ}{sen\, 64{,}95^\circ} = \frac{4{,}2 \cdot 0{,}866}{0{,}9059} = 4{,}02\ cm$$

El lado c=4,02 cm.

Ecuaciones trigonométricas

En las ecuaciones trigonométricas intervienen funciones trigonométricas, que son periódicas y, por tanto, sus soluciones se pueden presentar en uno o en dos cuadrantes y, además, se repiten en todas las vueltas.

Para resolver una ecuación trigonométrica haremos las transformaciones necesarias para trabajar con una sola función trigonométrica, para ello utilizaremos las identidades trigonométricas fundamentales.

Ejemplos:

Resuelve las ecuaciones trigonométricas:

1. $2tg\,x - 3\text{cotg}\,x - 1 = 0$

$$2tg\,x - \frac{3}{tg\,x} - 1 = 0 \qquad 2tg^2 x - tg\,x - 3 = 0$$

$$tg\,x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

$$tg\,x = \frac{3}{2} \qquad x = 56°18'35'' + 180°k$$

$$tg\,x = -1 \qquad x = 135° + 180°k$$

2. $\cos^2 x - 3sen^2 x = 0$

$$1 - sen^2 x - 3sen^2 x = 0 \qquad 1 - 4sen^2 x = 0$$

$$sen^2 x = \frac{1}{4} \qquad sen\,x = \pm\frac{1}{2}$$

$$x = \text{arcsen}\,\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30° + 360°k \\ x_2 = 150° + 360°k \end{cases}$$

$$x = \text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 210° + 360°k \\ x_4 = 330° + 360°k \end{cases}$$

3. $sen(2x + 60°) + sen(x + 30°) = 0$

Transformamos la suma en producto

$$2\,sen\left(\frac{3x}{2} + 45°\right)\cos\left(\frac{x}{2} + 15°\right) = 0$$

Dividimos por 2 en los dos miembros e igualamos cada factor a 0.

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}+45°\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2}+45°=0°+360°k & x=-30°+120°k \\ \frac{3x}{2}+45°=180°+360°k & x=-30°+120°k \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}+15°\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}+15°=90°+360°k & x=150°+360° \\ \frac{x}{2}+15°=270°+360°k & x=510°+360°k \\ & x=150°+360°k \end{cases}$$

4. $\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x=\frac{1}{2}$

$\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x=\frac{1}{2}$ $\quad -\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x=-\frac{1}{2}$ $\quad \cos 2x=-\frac{1}{2}$

$$2x=\begin{cases}120°+360°k \\ 240°+360°k\end{cases} \Rightarrow x=\begin{cases}60°+180°k \\ 120°+180°k\end{cases}$$

5. $\operatorname{sen} x+\sqrt{3}\cos x=2$

$\operatorname{sen} x+\sqrt{3}\cos x=2$ $\quad \frac{1}{2}\operatorname{sen} x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1$

$\operatorname{sen}(x+60°)=1$ $\quad x+60°=90°+360°k$

$x=30°+360°k$

6. $\operatorname{sen} 2x=\cos 60°$

$\operatorname{sen} 2x=\cos 60°$ $\quad \operatorname{sen} 2x=\frac{1}{2}$

$$\begin{cases}2x=30°+360°k & x=15°+180°k \\ 2x=150°+360°k & x=75°+180°k\end{cases}$$

7. $2\cos x=3tg\, x$

$2\cos x=\frac{3\operatorname{sen} x}{\cos x}$ $\quad 2\cos^2 x=3\operatorname{sen} x$

$2\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)=3\operatorname{sen} x$ $\quad 2-2\operatorname{sen}^2 x=3\operatorname{sen} x$

$2\operatorname{sen}^2 x+3\operatorname{sen} x-2=0$

$$\operatorname{sen} x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4}$$

$$\operatorname{sen} x=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=30°+360°k \\ x_2=150°+360°k \end{cases}$$

$\operatorname{sen} x=-2$ Sin solución porque $-1\le \operatorname{sen} x\le 1$

8. $\operatorname{sen} 2x\cdot\cos x=6\operatorname{sen}^3 x$

$2\operatorname{sen} x\cdot\cos x\cdot\cos x=6\operatorname{sen}^3 x$

$\operatorname{sen} x\left(\cos^2 x-3\operatorname{sen}^2 x\right)=0$

$$sen\,x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0° + 360°k \\ x = 180° + 360°k \end{cases} \Rightarrow x = 0° + 180°k$$

$$\cos^2 x - 3sen^2 x = 0 \qquad \cos^2 x = 3sen^2 x$$

$$tg^2 x = \frac{1}{3} \qquad tgx = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$tg\,x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 30° + 180°k$$

$$tg\,x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 150° + 180°k$$

9. $$4sen\,\frac{x}{2} + 2\cos x = 3$$

$$4sen\,\frac{x}{2} + 2\left(\cos^2\frac{x}{2} - sen^2\frac{x}{2}\right) = 3$$

$$4sen\,\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2} - 2sen^2\frac{x}{2} = 3$$

$$4sen\,\frac{x}{2} + 2\left(1 - sen^2\frac{x}{2}\right) - 2sen^2\frac{x}{2} = 3$$

$$4sen^2\frac{x}{2} - 4sen\,\frac{x}{2} + 1 = 0$$

$$\left(2sen\,\frac{x}{2} - 1\right)^2 = 0 \qquad 2sen\,\frac{x}{2} - 1 = 0$$

$$sen\,\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \begin{cases} \frac{x}{2} = 30° + 360°k & x = 60° + 360°k \\ \frac{x}{2} = 150° + 360°k & x = 300° + 360°k \end{cases}$$

Ejercicios de sistemas de ecuaciones trigonométricas

Resolver los sistemas de ecuaciones trigonométricas:

1. $$\begin{cases} sen\,x + sen\,y = 1 \\ x + y = 90° \end{cases}$$

$$y = 90° - x$$
$$sen\,x + sen\,(90° - x) = 1$$

$$2sen\,\frac{x + (90° - x)}{2}\cos\frac{x - (90° - x)}{2} = 1$$

$$2sen\,45° \cdot \cos(x - 45°) = 1 \qquad \cos(x - 45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x - 45° = \begin{cases} 45° + 360°k \Rightarrow x = 90° + 360°k & y = 0° + 360°k \\ -45° + 360°k \Rightarrow x = 0° + 360°k & y = 90° + 360°k \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 \\ \operatorname{cotg}\ (x+y) = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \cos y + \cos x \cdot \operatorname{sen} y = 1 \\ \operatorname{sen} x \cdot \cos y - \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

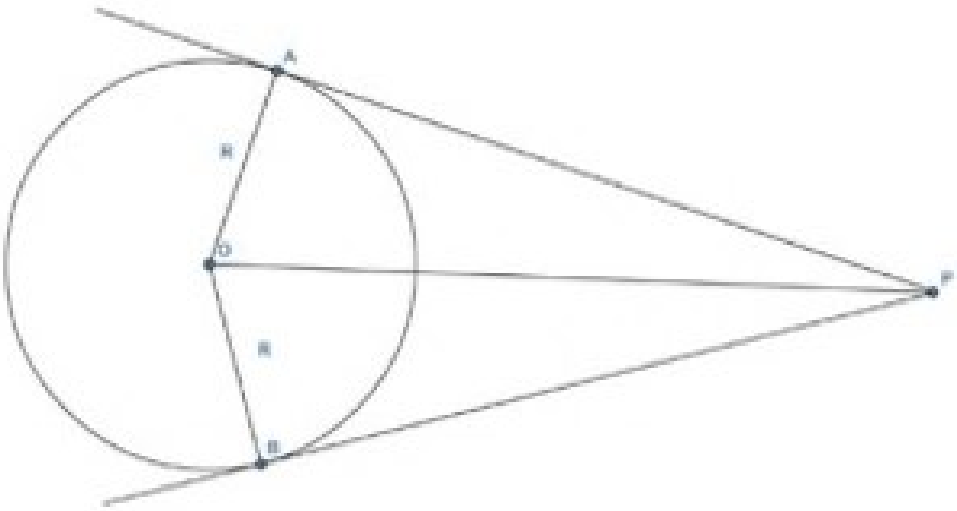
Siete teoremas

Descubrir cuáles son verdaderos y cuáles falsos

- Si es verdadero, realizar la demostración.
- Si es falso, ilustrar con un contraejemplo.

Teorema 1 (Tangentes desde un punto)

1.- El ángulo formado por dos tangentes trazadas desde un punto exterior es igual a la semidiferencia entre el arco interceptado más lejano y el más cercano.



Teorema 2 (Tangentes desde un punto)

2.- El ángulo formado por dos tangentes trazadas desde un punto exterior es igual a la mitad del ángulo central.

Teorema 3 (de las cuerdas)

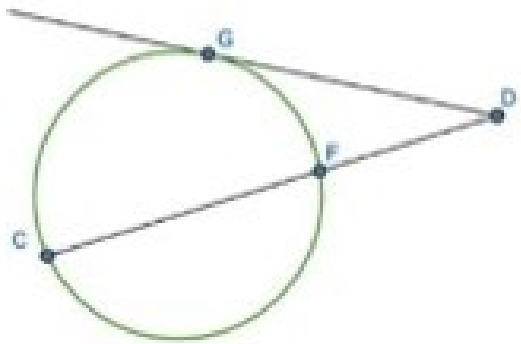
3.- Si dos cuerdas se interceptan en el interior de la circunferencia, el producto de los segmentos determinados en una cuerda es igual al producto de los segmentos determinados en la otra cuerda.

Se cumple que:

EG • GF = CG • GD

Teorema 4: Teorema de la secante y la tangente

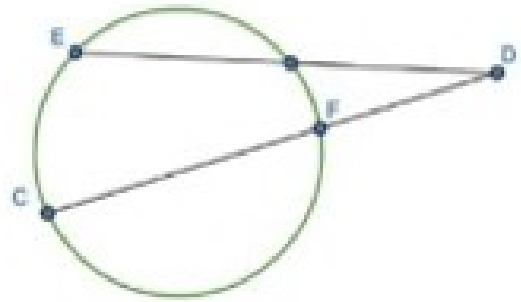
4.- Si desde un punto exterior a una circunferencia, se trazan una tangente y una secante, el cuadrado del segmento tangente equivale al producto entre el segmento exterior y el segmento total de la recta secante. Se cumple que:



$(GD)^2 = CD \cdot FD$

Teorema 5 (de las secantes)

5.- Si dos rectas secantes interceptan a una circunferencia, el producto entre el segmento exterior a la circunferencia con el segmento total en una de las secantes es igual al producto de los correspondientes segmentos en la otra secante.
Se cumple que:



ED • GD = CD • FD

Teorema 6

6.- En todo triángulo la suma de las secantes de los ángulos interiores es igual al producto de ellas mismas:

SEC A + SEC B + SEC C = SEC A. SEC B. SEC C

Teorema 7

7.- En todo triángulo oblicuángulo la suma de las tangentes de los ángulos interiores es igual al producto de ellas mismas:

Tg A + Tg B + Tg C = Tg A. Tg B. Tg C

La trigonometría en fórmulas

a). $sen^2 A + \cos^2 A = 1$

b). $sen(A \pm B) = senA.\cos B \pm senB.\cos A$

c). $\cos(A \pm B) = \cos A.\cos A \mp senA.senB$

d). $tg(A \pm B) = \dfrac{tgA \pm tgB}{1 \mp tgA.tgB}$

e). $senA + senB = 2.sen\dfrac{1}{2}(A+B).cos\dfrac{1}{2}(A-B)$

f). $senA - senB = 2.sen\dfrac{1}{2}(A-B).cos\dfrac{1}{2}(A+B)$

g). $\cos A + \cos B = 2.\cos\dfrac{1}{2}(A+B).\cos\dfrac{1}{2}(A-B)$

h). $\cos A - \cos B = -2.sen\dfrac{1}{2}(A+B).sen\dfrac{1}{2}(A-B)$

i). $senA.senB = \dfrac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

j). $senA.\cos B = \dfrac{1}{2}[sen(A+B) + sen(A-B)]$

k). $\cos A.\cos sB = \dfrac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$

l). $sen2A = 2.senA.\cos A$

m). $senA = 2.sen\dfrac{1}{2}A.\cos\dfrac{1}{2}A$

n). $\cos 2A = \cos^2 A - sen^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2sen^2 A$

o). $sen^2 A = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2A)$

p). $\cos^2 A = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2A)$

q). $tg\dfrac{1}{2}A = \sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}$

r). $tg2A = \dfrac{2tgA}{1 - tg^2 A}$

ArquiMática

s). $tgA = \dfrac{2tg\,\frac{1}{2}A}{1-tg^2\,\frac{1}{2}A}$

La historia de los cinco genios y un entrometido

Los cinco genios de Grecia eran conocidos —además de Grecia, en el mundo entero—gracias a las redes sociales del chisme y el rumor. Es que en aquella época eran los únicos medios de comunicación que se conocían. Pero lo cierto es que entre ellos no se conocían o no se recordaban. Hasta que un día ocurrió "La rebelión en Deltápolis". Quiso el destino que ese día se conocieran, pero ese día no fue uno para el olvido, tampoco para el recuerdo.

—¿Quiénes eran los cinco genios? —preguntó un curioso.

—¿Quién es el entrometido? —preguntó un entrometido.

—¿Qué pasó en Deltápolis? —quiso saber un tercero.

—¡Calma, calma!!!! Que no puedo responder a todos al mismo tiempo. Por orden responderé; los cinco genios de Grecia eran: Pitágoras de Samos, Euclides de Mégara, Arquímedes de Siracusa, Eratóstenes de Cyrenne y Herón de Alejandría.

—No los nombraste por orden alfabético —protestó el curioso.

Con disgusto le respondí: "están en orden cronológico, según sus datas de nacimiento".

—¿Y por qué no se conocían?

—Porque vivían en polis distintas.

—¿Y cuándo se conocieron?

—Cuando el Visir de Deltápolis los invitó.

—¿Y por qué los invitó y a dónde?

—Los invitó porque ese día condecoraban a Pitágoras y lo declaraban Visitante Ilustre. Los otros cuatro eran los invitados de honor a la ceremonia.

—No me dijiste a dónde —observó el curioso.

—Al palacio de Deltápolis —respondí con pocas ganas.

—¿Y por qué condecoraban a Pitágoras?

—Porque desde "La Escuela Pitagórica" enunciaron el famoso teorema.

—¿Qué teorema?

—¡El teorema de Pitágoras!!!! —le dije levantando la voz.

—Pero no se enoje.... ¿le puedo hacer otra pregunta?

Y sin esperar respuesta aseguró:

—¡Esos cinco señores no eran contemporáneos!!

—¡Esa no es una pregunta!!!! —protesté— ¡Y no pregunte más!!! Ellos (señalando a los otros dos) esperan su respuesta.

Dirigiéndome al segundo le pregunté en forma inquisidora: —¿Cuál era su pregunta?

—¿Quién es el entrometido de esta historia? —dijo.

—¡Usted es el entrometido!! —le grité enojado.

Se quedó callado, mirándome estupefacto, y sin saber qué decir.

—Perdón —le dije—. No fui muy cortés, es que todavía me dura el enojo con su amigo el curioso. Y a todo esto, ¿cuál era su pregunta?

—¿Quién es el entrometido de esta historia? —volvió a preguntar.

—¡Ahjá! Ahora sí, ya recuerdo —serenamente le respondí—. El entrometido de esta historia es el señor Coseno.

—¿El señor Coseno? ¿Y quién es el señor Coseno?

—Este señor llamado Coseno, que vino de Babilonia, es el entrometido que arruinó los festejos de la Ceremonia en Deltápolis.

—¿Por qué le llamas el entrometido?

—Porque se apropió indebidamente del teorema de Pitágoras y le puso su nombre.

—¡Pero eso que hizo es una usurpación!! ¿Qué hizo Pitágoras?

—Nada. No lo sabía. Se enteró el día que lo debían condecorar y que no lo condecoraron por la revoltosa protesta de los pobladores de Deltápolis.

—Me quedé pensando en lo que dijo el que me precedió en la requisitoria.

—¿En qué se quedó pensando, amigo?

— "Los cinco genios no eran contemporáneos" —dijo este señor y señaló al curioso.

Ahora el estupefacto fui yo. Mi respuesta fue el silencio.

—¿Podría explicarme cómo se conocieron?

—Estimado amigo, está preguntando demasiado. Hasta más que el curioso. Su tiempo asignado se terminó. Es el turno del tercero.

Aludido el tercero, preguntó: —¿Qué pasó en Deltápolis? ¿Por qué tanto alboroto?

—Su requerimiento amerita que les pida su atención y silencio para relatarles:

La rebelión en Deltápolis

Aquel día Deltápolis amaneció apacible y soleado, sin sospechar siquiera que sería la jornada más revoltosa de su historia. La idea del Visir de esta polis no fue muy feliz, o quizás sí: "Condecorar a Pitágoras y declararlo Visitante Ilustre". Y ese fue el día elegido.

Es que esta era la Ciudad habitada por los triángulos, y el señor Visir encontró muy oportuno el agasajo a quien los había honrado con su teorema, sin advertir que sólo estaba dedicado a los rectángulos (sector minoritario de la población). Tampoco advirtió que esta situación sería aprovechada por el entrometido usurpador del teorema para agitar los tranquilos ánimos de los triángulos. Pero sí tuvo la bella idea de invitar a la ceremonia de condecoración a Euclides de Mégara, a Arquímedes de Siracusa, a Eratóstenes de Cyrenne y a Herón de Alejandría.

El caso es que, enterados los triángulos de los honores previstos a Pitágoras, el malestar se apoderó de ellos. Más aún cuando el poco afecto a la verdad les dijo: "Ese teorema me pertenece y se lo dediqué a todos ustedes, mientras que este personaje que será condecorado no solo me lo robó, sino que a ustedes los discriminó, dedicándole el teorema sólo a los que tienen un ángulo recto, que no puedo decir un ángulo de 90° porque el sistema sexagesimal no fue creado todavía."

El apóstrofe del señor Coseno dirigido a Pitágoras también recayó sobre el Visir, y fue pronunciado en el día de la víspera ante el Cabildo Abierto de los Triángulos.

—¿Y qué haremos? —preguntó un equilátero a la Asamblea.

—¡No podemos quedarnos cruzados de lados! —dijo un escaleno— ¡Debemos protestar!

El más exaltado de los obtusángulos:

—¡Tomaremos el palacio y derrocaremos al Visir! ¡Luego expulsaremos a Pitágoras!

—Propongo la marcha y posterior piquete de "Los indignados" —dijo el equilátero— ¡Y seremos los primeros indignados de la historia! Obstruiremos el ingreso al palacio y frustraremos la condecoración.

—De acuerdo —dijo el obtusángulo—, pero no dijiste nada del Visir ni de Pitágoras.

—El de Samos no tiene nada que ver, es simplemente el invitado del Visir. Y la protesta es contra la decisión de rendir tributo a quien no lo merece —replicó el Equilátero—. No está bien la sedición ni derrocar al Visir. Esta actitud no se corresponde con nuestros principios democráticos. Repito: marcha y piquete.

Y todos los presentes, menos el obtusángulo —claro está— aplaudieron en señal de aprobación y uno de ellos le recordó:

—Señor Equilátero, no podemos autodenominarnos "los primeros Indignados de la Historia". Recuerde que el gallego Cerón ya se proclamó "El Primer Indignado", en el primer capítulo de su segundo libro.

—¿Quién es ese cero grande? ¿Y cuándo escribió sus libros? —preguntó un modesto triángulo isósceles.

—No podemos hablar del número cero, los hindúes aún no lo inventaron —lo corrigió el equilátero.

—Está bien —dijo el isósceles— Se llame como se llame ese gallego, ¿cuándo escribió "El primer indignado"?

—Todavía no lo escribió —dijo otro equilátero—, lo hará recién en los albores del siglo XXI. Y no lo escribirá en la Hispania, sino en Argentum. Y será asesorado literariamente por el autor de esta historia.

—Entonces es al revés —protestó el primer equilátero— el que no puede autodenominarse "El primer indignado" es el gallego. De hecho, "los primeros indignados de la historia" somos nosotros. Y me parece que debiéramos decirle al autor de esta historia, que no sé quién es, que lo asesore mejor al gallego.

—Basta de hablar de extranjeros —intervino otro triángulo— ¡el que nos tiene aquí indignados es nuestro Visir! Así que rápidamente definamos la protesta.

—Antes de definir la protesta —intervino otro isósceles— ¿podría explicarme señor Equilátero qué significa "piquete"?

—Esta es la denominación que le darán en Argentum a la indebida interrupción del tránsito en señal de protesta —le dijo el Equilátero.

—Y, ¿dónde queda Argentum? —siguió preguntando el isósceles.

—Ya te lo explicó Thales de Mileto en el prefacio de este libro y no sigas preguntando porque nos daremos cuenta de que no leíste "La historia de los siete sabios de Grecia y sus sentencias".

Entonces pidió la palabra el más anciano y sabio de los triángulos, y con pausada voz les explicó:

—Se llama piquete a un pequeño grupo de soldados, designado para hacer un servicio extraordinario, en especial fusilamientos. También se llama piquete al grupo de personas que recorren los senderos o se colocan en ciertos lugares para impedir que se trabaje cuando se ha convocado una huelga (obviamente esta es una definición premonitoria, ya que los fusiles todavía no existen y las huelgas tampoco). De manera que llamar piquete al impedimento del ingreso al palacio y frustrar la condecoración es correcto.

—¡Entonces "Marcha y piquete" serán las consignas de mañana!!!!!

—¡Así será! —gritó la multitud.

De esta manera terminó la asamblea de "Los primeros indignados y los primeros piqueteros de la historia".

¡Y llegó el día señalado!

Los triángulos rectángulos, que no habían participado en la jornada anterior de la asamblea, se sumaron a la protesta en solidaridad con el resto de los triángulos.

También adhirieron los triángulos esféricos y los deltaedros.

La marcha fue multitudinaria y estruendosa. Una gran pancarta la encabezaba:

ΧΟΝΣΙΔΕΡΑΔΟΣ ΣΙ, ΔΙΣΧΡΙΜΙΝΑΔΟΣ ΝΟ
ΝΙ ΥΝΟ ΜΕΝΟΣ !!!!

Más atrás pancartas menores con inscripciones alusivas a la protesta:

Σι αλ. Χοσενο
Νο α Πιτ(γορασ

Enterados de la gran marcha triangular y de la presencia de los cinco genios en Deltápolis, los discípulos de Euclides partieron desde Alejandría rumbo a la polis de los Triángulos, con el lógico permiso de Ptolomeo I. Allí participaron de la marcha y aprovecharon para entrevistar a algunos manifestantes:

—Ustedes, los triángulos, ¿nos ayudarían a resolver un problema de la trigonometría que nos mantiene en vilo y que nos quita el sueño?

—Sí, por supuesto —dijeron los manifestantes.

—Siendo la trigonometría la encargada de la medición de nuestras vidas, habéis elegido a los especialistas —dijo un escaleno—, ¿cuál es el problema?

—Dada la siguiente igualdad, determinar si se trata de una identidad o de una ecuación. Si es una identidad, verificarla. Si se trata de una ecuación, resolverla.

—¿Y cuál es la igualdad? —preguntó el escaleno.

—4.Senx.Sen2x.Sen3x = Sen2x + Sen4x – Sen6x

—Facilísimo —dijo el escaleno.

—Realmente simple —añadió un equilátero.

—Pero fácil, facilito —indicó el acutángulo.

—Una tontería —observó el que llevaba un cartel.

—Muy sencillo —aseguró otro.

—Elemental, muy elemental —señaló, muy pedante, el esférico.

—Perfecto —dijo el bedel de Alejandría—. Pero ¿cuál es la respuesta?

—Bueno, es que… ahora no tenemos tiempo porque estamos con la marcha… —le dijo el esférico y se diluyó entre la multitud, dejando al alejandrino sin respuesta.

—¡Señor Visir, Señor Visir!!!! —ingresó gritando el paje a los aposentos del causante de la indignación triangular.

—¿Qué pasa, Servil? Te noto agitado —le preguntó el Visir.

—¡Es que me enteré de la marcha triangular de los indignados!!!!

—¿Marcha triangular???? ¿Los indignados???? ¿De qué estás hablando, Servil??

—Los pobladores están indignados con la condecoración a Pitágoras que harás esta tarde. Y resolvieron marchar en señal de protesta y realizar un piquete impidiendo los honores al señor de Samos.

—¡Malditos ingratos!! —bramó el Visir— ¿A qué hora es la marcha?

—¡Ya están marchando, señor!!! Estarán aquí en breve —alertó Servil.

Corrió el Visir hasta el balcón que daba sobre los jardines de su palacio, desde allí vio a la multitud enfervorizada que se acercaba a paso firme, realizando cánticos contrarios al Visir al son de la batucada.

—¡Rápido, Servil, convoca a la guardia y que impidan la llegada de los insurrectos!

—¡Gran parte de la guardia está en el puerto de Alejandría esperando a Pitágoras y a Arquímedes!!!! El resto de la guardia está de acuerdo con la marcha y no hará nada por impedirla. Son todos triángulos, Señor.

—¡Malditos traidores!!!!! —volvió a bramar el Visir— ¿Y los otros tres invitados?

—Euclides y Herón están en el puerto de Alejandría, esperando a Pitágoras y a Arquímedes, desde allí vendrán los cuatro por vía terrestre. Eratóstenes, por su lado, viene cabalgando en su camello desde hace más de 2 meses.

—Ese Eratóstenes es genial, pero me parece que está enloqueciendo. Anda por todas partes diciendo que la tierra es redonda y que ya calculó la longitud de la circunferencia. Ja, ja, ja.

Las risotadas del Visir se mezclaron con el alboroto de la multitud que comenzaba a llegar y a apostarse en los jardines y en los alrededores del palacio. El Visir enmudeció y luego le preguntó desesperadamente a Servil:

—Y ahora, ¿qué hacemos?

—No lo sé, Señor, pero ni los invitados podrán ingresar, ni usted podrá salir.

—¡Ya lo sé!! —dijo el Visir— Trasladaremos la ceremonia y los actos a Alejandría y todos estos quedarán protestando en vano. Ja, ja, ja.

—"¿Condecorar a Pitágoras y declararlo Visitante Ilustre de Deltápolis en Alejandría????" —preguntó Servil— Tendrá que pedirles permiso a las autoridades de Alejandría.

—No pediré permiso a nadie. ¡Y convoca ya a todos a Alejandría!!!!! —gritó el Visir.

—¿A dónde los convoco, a qué hora y cómo? —preguntó Servil.

—A la caída del sol en "El Mesón de Diógenes".

—¿Dónde es "El Mesón de Diógenes" y cómo les aviso? —volvió a preguntar Servil.

—El que queda a la vuelta del faro, Servil—. ¡Mándales un WhatsApp! —No deben tener señal —observó Servil.

—¡No te importa, Servil!!! Mándales un WhatsApp y ayúdame a camuflarme para poder salir de aquí.

Así lo hizo Servil y observó en todos los casos la doble tilde celeste en su iPhone portable en señal de que la comunicación fue exitosa.

—¡Listo! —le dijo al Visir y comenzó a ayudarlo con el camuflaje.

Vestido de obtusángulo estaba irreconocible. Y así pudo mezclarse entre la multitud y pasar desapercibido. De esta manera, con la inseparable compañía de Servil, comenzó a buscar un camello que lo trasladara hasta Alejandría.

—¡No pasa ninguno desocupado!!! —protestó el Visir ante Servil.

—¡Están de paro, señor! ¡En adhesión a la marcha, también los dromedarios!

—¡Los maldigo a todos!!! —bramó el Visir.

—¡Señor, Señor!! —alertó Servil, señalando a dos dromedarios truchos que pasaban por el lugar.

Así fue cómo el Visir, camuflado de obtusángulo, previo pago del doble de talentos de la tarifa oficial (que así le cobró el transportista trucho), llegó a destino montado sobre un dromedario. También Servil.

Cuando llegó, se quitó la obtusa vestimenta y se dirigió a "El Mesón de Diógenes". Le pidió al mesonero dos guisados de arvejas y una jarra de vino. Esperó.

Los primeros en llegar: Euclides y Pitágoras. Se saludaron y luego de tomar asiento, el Visir preguntó por Arquímedes y Herón.

La respuesta fue interrumpida, un personaje irrumpió a la entrada de "El Mesón": ¡Eratóstenes!!

—¡Genial, Eratóstenes! ¡Qué bueno que llegaste! —le dijo el Visir y lo abrazó— ¿Cuánto demoraste en llegar?

—Según mis cálculos —respondió Eratóstenes—, la distancia recta (no la curva real), porque la Tierra es redonda (mi gran descubrimiento), entre Cyrenne y Alejandría es de 1.500.000 de cre. El ángulo central descrito entre ambas poblaciones y el centro de la Tierra es la 50ava parte del giro completo, mientras que la marcha del camello que me transportó es de 1 cre por segundo. El camello solo marchaba 16 horas por día, así que ya puedes calcular cuánto demoré en llegar.

—¿Qué es el cre?? —preguntó el Visir.

—Es la sigla del codo real egipcio.

—Ven que te presento a Euclides y a Pitágoras, de paso les pedimos que nos ayuden con el problema que me planteaste.

Mientras los saludaba, le dijo al Visir:

—Al maestro Euclides ya lo conocía, aunque él no se acuerde de mí. Estudié en su escuela y mi compañero de banco era Arquímedes. ¡Por fin conozco al gran Pitágoras…! Y hablando de Arquímedes, ¿a dónde está que no lo veo?? Desde la época de la escuela que no sé de él.

—Todavía no llegó —le respondió Euclides—. El barco de Siracusa está demorado, pero en cuanto llegue (lo está esperando Herón), vendrán por acá. Y ahora que te veo bien, ahora sí te recuerdo. Eras el niño más curioso de la escuela y el más revoltoso. ¿Cómo fue tu viaje?

—Muy tranquilo, pero aburrido, muchos días sobre un camello introvertido. Sólo esta mañana cuando llegaba a Deltápolis, en momentos que recibí el WhatsApp, de no sé quién de parte del Visir, tuve un momento de distracción: allí había una colorida y estruendosa protesta de triángulos. Estaban en asamblea y me detuve a escuchar. Hablaban de ti, querido Visir.

—¿De mí? ¿Y qué decían? —preguntó un exaltado Visir.

—Hablaban de tu cobarde huida del palacio, y, como siempre sucede, la información se filtró: sabían que estarías aquí. Mientras debatían la inminente marcha hacia Alejandría, retomé el sendero y aquí me tienen.

—¿Tú crees que vendrán? —preguntó desesperado el Visir.

—Seguro —respondió Eratóstenes. Tan seguro como que la Tierra es redonda.

—¡Llegaron! —anunció el mesonero, desde la puerta de ingreso.

—¿Los triángulos???? —preguntó aterrado el Visir.

—No —respondió el mesonero—. ¡Llegaron Arquímedes y Herón!

—¡Ahhhh! —dijo el Visir en señal de alivio— ¿Dónde están?

—Acá estamos —exclamó Herón con los brazos en alto— ¡Miren a quién traigo!

Todos dirigieron sus miradas hacia la puerta de ingreso y vieron entrar a un cansado, pero sonriente Arquímedes. El viaje había sido duro y agobiante.

Algarabía general, se saludaron y se abrazaron.

—¡Eratos!! ¿Cómo estás amigo? —le dijo Arquímedes.

—¡Muy bien de verte, Arqui! —respondió Eratóstenes— ¿Ya pudiste mover el mundo?

—¡Todavía no consigo que me den un punto de apoyo!!! Cuando lo consiga lo moveré. Aunque estoy preocupado, me contaron que afirmas que la Tierra es redonda. Si es así, deberías indicarme el punto de contacto con la palanca que ya inventé y seguramente "moveré el mundo".

—¿Viste quién está acá? —preguntó Eratóstenes, señalando a Euclides.

—¡Maestro!!! —exclamó Arquímedes. Y ambos se confundieron en un solo abrazo.

—¿Y acá? —preguntó Eratóstenes, señalando esta vez a Pitágoras, quien por su bajo perfil solo los observaba en silencio.

—¡Pitágoras!!!!! —exclamaron todos al unísono.

Corrieron a saludar al condecorado del día (que no sería condecorado) y entre saludos y loas, el prudente Pitágoras serenamente así les habló:

—Jamás pensé en recibir tantos honores, creo que no los merezco, ni el gran honor de la presencia de ustedes, que vinieron invitados por el señor Visir a mi condecoración. No sé si esta ceremonia se realizará, me parece que las circunstancias indican que no. Sé que vinieron por mí y se los agradezco.

Y continuó: "Gran Euclides, el fundador de la geometría plana. Fundaste las bases de este gran edificio y calculaste el valor del número áureo.

Arquímedes de Siracusa, el primer ingeniero de la historia, tus grandes inventos: el tornillo, la cóclea y la palanca re harán inmortal. ¡Eureka, Eureka!!, gritabas cuando descubriste el principio de flotación. Calculaste el número Pi.

Inquieto Eratóstenes, hoy me entero de que descubriste que la Tierra es redonda. Lo que no entiendo es por qué la gente no se cae, luego me explicarás. También sé que dererminaste la longitud de la circunferencia. También luego me explicarás cómo lo hiciste.

Gran cultivador de las ciencias aplicadas, Herón de Alejandría. ¡A ti te debemos la primera turbina, la primera máquina a vapor y el primer teodolito!

Agradezco al Visir la consideración que tuvo conmigo, pero creo que se equivocó en el orden: Ustedes, los condecorados, y yo, el invitado, así debiera ser…

Todos estaban absortos con el discurso de Pitágoras, cuando el alboroto de la multitud los distrajo.

—¡Llegaron los manifestantes! —exclamó el mesonero.

—¿Son muchos? —preguntó el Visir con tono de preocupación.

—No lo sé —respondió el mesonero, están acampando alrededor del faro.

Arquímedes, que había sido el último en llegar y estaba desorientado, preguntó:

—¿Alguien puede decirme qué pasó? ¿Por qué estamos aquí? Esta mañana cuando recibí el whatsappero sms no me explicaba nada, solo que debía venir a Alejandría. ¿Quiénes son los manifestantes? ¿Qué reclaman?

Entonces todas las miradas se dirigieron al Visir. Y el Visir les dijo:

—Antes que nada, les solicito sus disculpas por este cambio de escenario y quiero expresarles mi agradecimiento a todos ustedes por su presencia. Ocurrió esta mañana que mi paje Servil, que así se llama, ingresó a mis aposentos y me alertó de la marcha de los triángulos indignados y…

Y así el Visir les relató la historia que ustedes ya conocen.

—¿Te disfrazaste de obtusángulo? —preguntó sonriente Euclides.

Y todos soltaron una gran risotada: Ja, ja, ja, ja…—Y así disfrazado, ¿te trajo un dromedario trucho? —preguntó Herón.

Las risotadas prosiguieron: Ja, ja, ja, ja…

—¿Y te cobró el doble de la tarifa normal? ¡Qué grande este dromedario!!!

—¡Mesonero!!! ¡Vino para todos! —ordenó Arquímedes— ¡Invita el Visir! ¡Nunca me había divertido tanto!

—Todo muy lindo, todo muy divertido —dijo Pirágoras— pero ¿cómo es esa versión que dice que le robé el teorema al señor Coseno?

— Así lo afirmó el mismo Coseno ante el cabildo triangular —dijo el Visir.

—Pero esto no es creíble —afirmó Eratóstenes—. Lo cierto es que los triángulos así lo creyeron y por eso la marcha piquetera. Esta mañana, cuando pasé por Delrápolis, una gran pancarta decía: "Sí a Coseno, no a Pitágoras".

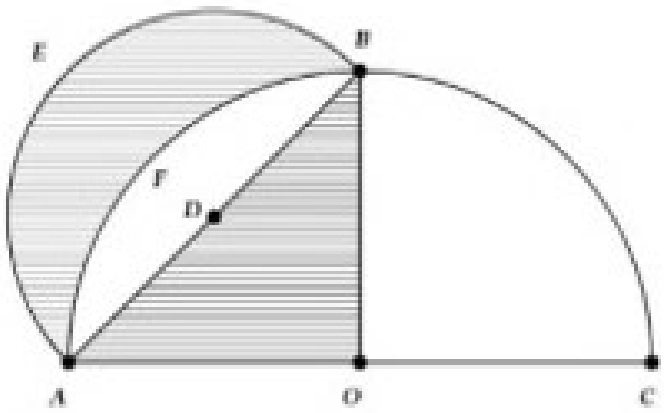
—¡Maldito Coseno!!! —gruñó Pitágoras— El culpable es él, que tiene la costumbre de desaparecer cuando aparece el ángulo recto.

—¡Ahora sí!!! —exclamó Arquímedes— ¡Ahora todo está claro!!! ¡Lo único que no está claro es este lugar! ¡Enciende las antorchas, mesonero, y trae más vino, que invita el visir!

El mesonero, luego de encender las antorchas de "El Mesón de Diógenes" y de llevar abundante vino, solicitado por Arquímedes, les pidió a los presentes que lo ayudaran con el siguiente problema:

"El arquitecto que diseñó la modificación de la fachada del mesón proyectó el acceso (con apertura hacia fuera, por razones reglamentarias) con puertas de 2 hojas. Arriba un arco de medio punto, encerrando un semicírculo de diámetro igual a 2,40 metros, que es la luz del ingreso, y sobre el arco de medio punto 2 lúnulas".

Mientras les contaba el proyecto, ilustraba sobre un papiro con el siguiente dibujo:



"El arquitecto me dijo que, si lograba calcular la superficie de la lúnula, el proyecto sería sin costo, caso contrario deberé pagarle 1.000 talentos y 300 denarios".

—¿Cuál es la superficie de la lúnula? —les preguntó el mesonero.

Cuando todos se disponían a ayudar al mesonero, ingresó corriendo un agitado Servil, que se había infiltrado en la protesta triangular por pedido del Visir, diciendo:

—¡Señor, señor! ¡Los triángulos exigen vuestra presencia y la de Pitágoras en el faro!

Ni el Visir ni Pitágoras atinaban qué hacer, cuando escucharon que Herón les decía:

—Estimado Pitágoras, querido Visir, si ustedes me lo permiten, me presentaré ante todos los triángulos y les explicaré.

—¡Sí, sí, por favor!

Así fue como el valiente Herón, desde los balcones del faro de Alejandría, pronunció el discurso, que comenzó diciendo:

—¡Compañeros triángulos!!!! Quiso la fortuna y por mandato de todos los dioses y las hilanderas del destino, que sea yo el honrado en dirigirme a ustedes para deshacer el intríngulis que los tiene indignados…

Los triángulos que escuchaban con atención el discurso comenzaron a sentirse reconfortados por la brillante explicación de Herón y así se perfilaba el nuevo líder.

Concluyó de esta manera la reivindicación de Pitágoras y todos los triángulos festejaban calurosamente las buenas nuevas que Herón pronunciaba.

—Aprovecho la ocasión —les dijo el alejandrino— para hacerles un gran anuncio: ¡Mi gran fórmula! ¡La fórmula de Herón!

Los triángulos aplaudían alegremente sin entender hasta que finalmente Herón les dijo:

—¡Ahora podrán conocer sus medidas a partir de sus lados y estarán todos considerados y nunca más un triángulo será discriminado!

La ovación fue ensordecedora. Los triángulos vivaban a Herón y al son de tympanones y sistros, címbalos y crótalos, comenzaron a entonar las estrofas de "La marcha heronista".

Desde "El Mesón de Diógenes", donde escucharon la estruendosa ovación, salieron todos afuera atraídos por *"la maravillosa música"* de la alegría más populosa que se haya escuchado antes. Y así, desde el trotoir del mesón, vieron el espectáculo: Herón en andas de los triángulos más jóvenes y fuertes, seguidos por una gran multitud que cantaba: "… ¡HERÓN, HERÓN, QUÉ GRANDE SOS!

Así concluye "La historia de los cinco genios y un entrometido".

Nota 1: Aquellos que creyeron en la estrategia del entrometido se equivocaron. La historia rescata a Pitágoras como el gran matemático de todos los tiempos, condecorándolo eternamente, mientras que el señor Coseno quedó relegado (y para siempre) a un segundo lugar en el orden de las funciones trigonométricas.

Nota 2: El gallego Cerón, que fue mencionado en la Asamblea por un obtusángulo como "El Primer Indignado", según el primer capítulo de su segundo libro, siguió escribiendo. Y escribió 4 libros, cometiendo el error de publicarlos online y de grabarlos en discos compactos y peor aún de regalarlos a cuanto ser viviente tropieza en su camino: la forma más segura de que no quieran leerlos.

Nota 3: En las memorias de Ptolomeo I se cuenta que los alejandrinos que fueron a la marcha (con el permiso de Ptolomeo I) jamás recibieron respuesta de los triángulos en referencia a la igualdad trigonométrica. Todavía hoy es una deuda triangular.

Nota 4: Cuando al final de la jornada Pitágoras le recordó a Eratóstenes que todavía no le había explicado por qué la gente no se caía, Eratóstenes le recordó que no lo ayudó al Visir con el problema del camello, tampoco al mesonero con el cálculo de la lúnula. Ambos quedaron en deuda y en paz.

Nota 5: La cuadratura de la lúnula se debe al matemático griego Hipócrates de Quíos, nacido en la isla de Quios. No debe ser confundido con Hipócrates de Cos, el padre de la medicina griega y precursor del juramento hipocrático, nacido en la Isla de Cos.

Herón de Alejandría

Herón de Alejandría

Nacimiento	Siglo I d. C. Alejandría, Egipto helenístico
Campo	Inventor, científico, ingeniero, matemático
Conocido por	Eolípila, fórmula de Herón

Herón de Alejandría fue un ingeniero y matemático helenístico que se destacó en Alejandría (en la provincia romana de Egipto).

Este griego es considerado uno de los científicos e inventores más grandes de la antigüedad y su trabajo es representativo de la tradición científica helenista.

Contexto histórico y cultural

Tras el período helenístico, la ciencia helénica destacó en la ciudad de Alejandría, perdurando varios siglos (hasta la caída del Imperio romano). Allí surgieron periódicamente destellos de genialidad. Uno de estos genios fue Herón, que demostró una actitud premoderna para la mecánica, descubriendo, aunque de forma arcaica, la ley de acción y reacción.

Se basó a menudo en Ctesibio, inventor griego del siglo III antes de nuestra era, de quien se tienen noticias por el propio Herón y por Vitruvio. Describió gran número de máquinas sencillas y generalizó el principio de la palanca de Arquímedes. Ideó múltiples trabajos de inventiva y aportó muchas innovaciones en el campo de los autómatas, que facilitaron los estudios a los científicos.

Inventos y descubrimientos

Su mayor logro fue la invención de la primera máquina de vapor, conocida como «eolípila», «aelópilo» o «aelópila», y la fuente de Herón, cuya aplicación práctica en los templos le granjeó el pseudónimo de «el Mago». La eolípila era una máquina que consistía en una esfera hueca conectada a una caldera a la que se le adaptaban dos tubos curvos. El interior de la esfera estaba repleto con agua, la que se hacía hervir provocando que por los tubos arrancara el vapor, haciendo girar la bola muy rápido.

Una de las curiosidades del eolípilo es que esta máquina nunca tuvo un fin práctico en sí. Algunas fuentes comentan que el invento no era más que un juguete con la finalidad de entretener a los niños de la época.

Herón describió, aunque de forma arcaica mediante el eolípilo, la ley de acción y reacción de Isaac Newton, experimentando con vapor de agua. Generalizó el principio de la palanca de Arquímedes.

Neumática, hidráulica y robótica

Es autor de numerosos tratados de mecánica, como *La neumática*, en la que estudia la hidráulica, y *Los autómatas*, el primer libro de robótica de la historia. En *Sobre la dioptra* describe el funcionamiento de este aparato, similar al actual teodolito, usado en observaciones terrestres y astronómicas durante siglos. También en este libro describe el odómetro, utilizado para medir distancias recorridas por un viandante (o un vehículo).

Además, realizó una descripción detallada del *hydraulis* de Ctesibio (un órgano que funcionaba con agua).

Óptica

En óptica propuso en su *Catóptrico* que la luz viaja siguiendo el camino geométricamente más corto.

Trabajo como matemático

Sin embargo, es conocido sobre todo como matemático, tanto en el campo de la geometría como en el de la geodesia (una rama de las matemáticas que se encarga de la determinación del tamaño y configuración de la Tierra, y de la ubicación de áreas concretas de la misma especie).

Herón trató los problemas de las mediciones terrestres con mucho más acierto que cualquier otro de su época, por eso se dice que fue un gran científico.

Como matemático escribió *La métrica*, obra en la que estudia las áreas de las superficies y los volúmenes de los cuerpos. Desarrolló también técnicas de cálculo, tomadas de los babilonios y egipcios, como el cálculo de raíces cuadradas mediante iteraciones.

Fórmula de Herón

Su logro más destacado en el campo de la geometría es la denominada «fórmula de Herón», en la que se establece la relación entre el área de un triángulo y la longitud de sus lados:

«En un triángulo de lados *a*, *b*, *c*, y semiperímetro s=(a+b+c)/2, su área es igual a la raíz cuadrada de s(s-a)(s-b)(s-c)».

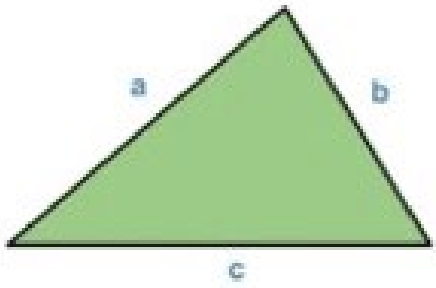
Herón de Alejandría vivió en una época no muy bien definida. Son conocidas varias obras suyas, pero se le recuerda sobre todo por la llamada fórmula de Herón, que nos permite calcular el área de un triángulo, conocidos los tres lados. No es necesario por tanto conocer la altura ni alguno de los ángulos. Si llamamos **s** al semiperímetro y **a**, **b**, **c** a los tres lados:

Llamando al semiperímetro

$$S = \frac{a + b + c}{2}$$

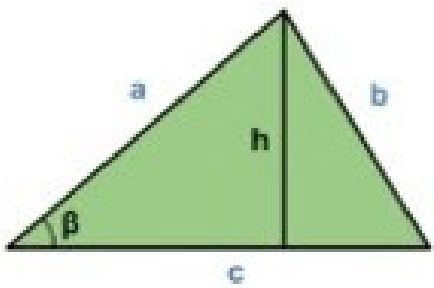
entonces el área puede expresarse como

$$\mathbf{A = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}}$$



La fórmula clásica para el área del triángulo nos dice que A=c*h/2; o lo que es lo mismo, A=c*a*sen (b)/2. Por otro lado, el teorema del coseno nos asegura que $b^2=a^2+c^2-2ac*\cos(b)$.

El camino por seguir será despejar cos (b) de la última ecuación y sustituir sen (b) en la anterior.



Tenemos pues que $\cos(b)=(a^2+c^2-b^2)/(2ac)$, y como $\text{sen}^2(b)=1-\cos^2(b)$ entonces:

$$Sen(\beta) = \sqrt{1 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2c^2}}$$

o lo que es lo mismo

$$Sen(\beta) = \sqrt{\frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2c^2}}$$

Teniendo en cuenta que el numerador es una diferencia de cuadrados y el denominador un cuadrado obtenemos:

Sen (b) = raíz $[(2ac-(a^2+c^2-b^2))*(2ac+(a^2+c^2-b^2))]/(2ac)$ =

Raíz $[(b^2-(a-c)^2)*((a+c)^2-b^2)]/(2ac)$

Sustituyendo ahora en la fórmula del área, tenemos que:

A = raíz $[(b^2-(a-c)^2)*((a+c)^2-b^2)]/4$ y, utilizando de nuevo la descomposición de la diferencia de cuadrados como suma por diferencia, nos queda:

$$A = \frac{\sqrt{(b + a - c)\,(b - a + c)\,(a + c + b)\,(a + c - b)}}{4}$$

Finalmente, introducimos el 4 dentro de la raíz quedando 16, y si observamos que (b+a-c)/2 = (s-c)/2, y que (b-a+c)/2 = (s-a)/2 y así sucesivamente, llegamos a la fórmula final:

$$\mathbf{A = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}}\ \text{c.q.d.}$$

Resumen de trigonometría

A continuación, se reiteran las expresiones más importantes:

1. Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos

$$sen(a+b) = sen\,a\ \cos b + \cos a\ sen\,b$$

$$sen(a-b) = sen\,a\ \cos b - \cos a\ sen\,b$$

$$\cos(a+b) = \cos a\ \cos b - sen\,a\ sen\,b$$

$$\cos(a-b) = \cos a\ \cos b + sen\,a\ sen\,b$$

$$tg(a+b) = \frac{tg\,a + tg\,b}{1 - tg\,a \cdot tg\,b}$$

$$tg(a-b) = \frac{tg\,a - tg\,b}{1 + tg\,a \cdot tg\,b}$$

2. Razones trigonométricas del ángulo doble

$$sen\,2a = 2\ sen\,a\ \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - sen^2 a$$

$$tg\,2a = \frac{2\,tg\,a}{1 - tg^2 a}$$

3. Razones trigonométricas del ángulo mitad

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

$$tg\,\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

4. Transformaciones de sumas en productos

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\,\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\,\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$

5. Transformaciones de productos en sumas

$$\operatorname{sen} A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)\right]$$

$$\cos A \cdot \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B)\right]$$

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$$

$$\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B = -\frac{1}{2}\left[\cos(A+B) - \cos(A-B)\right]$$

Teorema del seno

Cada lado de un triángulo es directamente proporcional al seno del ángulo opuesto.

$$\frac{a}{\sin a} = \frac{b}{\sin b} = \frac{c}{\sin c} = 2R$$

Teorema del coseno

En un triángulo el cuadrado de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto del producto de ambos, por el coseno del ángulo que forman.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Teorema de la tangente

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\,\frac{A+B}{2}}{tg\,\frac{A-B}{2}}$$

El área de un triángulo es la mitad del producto de una base por la altura correspondiente.

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h$$

El área de un triángulo es el semiproducto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman.

$$S = \frac{1}{2} b \cdot a \cdot sen\, C$$

El área de un triángulo es el cociente entre el producto de sus lados y cuatro veces el radio de su circunferencia circunscrita.

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

El área de un triángulo es igual al producto del radio de la circunferencia inscrita por su semiperímetro.

$$S = r \cdot p$$

Fórmula de Herón

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

CAPÍTULO VII

RELACIONES Y FUNCIONES

CAPÍTULO VII
RELACIONES Y FUNCIONES

Los conceptos de relación y de función son de suma importancia en matemática. Para lograr su comprensión es necesario adentrarnos en la noción de correspondencia, ya que esta tiene un papel fundamental en las relaciones y funciones.

Lo primero es entender que correspondencia es equivalente a relación. En nuestra lengua decir "en relación con" es equivalente a decir "corresponde a".

Ejemplos:

En una tienda comercial, cada artículo está relacionado con su precio; o sea, a cada artículo le corresponde un precio.

En la guía telefónica, cada cliente está relacionado con un número; o sea, a cada nombre de la guía le corresponde un número.

A continuación, veremos definiciones, conceptos y ejemplos que sólo pretenden introducir al lector en el amplio mundo de las funciones.

DEFINICIÓN MATEMÁTICA DE RELACIÓN Y DE FUNCIÓN

En matemática, relación es la correspondencia de un primer conjunto, llamado Dominio o conjunto de partida, con un segundo conjunto, llamado recorrido o rango o conjunto de llegada, de manera que a cada elemento del Dominio le corresponde uno o más elementos del recorrido o rango.

Por su parte, una función es una relación a la cual se añade la condición de que a cada valor del Dominio le corresponde uno y sólo un valor del recorrido.

De las definiciones anteriores podemos deducir que todas las funciones son relaciones, pero no todas las relaciones son funciones.

También debemos agregar que toda ecuación es una relación, pero no toda ecuación es una función.

Todas las relaciones pueden ser graficadas en el plano cartesiano.

Dados dos conjuntos A y B, una relación definida de A en B es un conjunto de parejas ordenadas (par ordenado) que hacen verdadera una proposición; dicho de otro modo, una relación es cualquier subconjunto del producto cartesiano A x B.

Ejemplo 1:

Si A = {2, 3} y B = {1, 4, 5}, encontrar tres relaciones definidas de A en B.

Solución

El producto cartesiano de A x B está conformado por las siguientes parejas o pares ordenados:

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 4), (3, 5)\}$$

Y cada uno de los siguientes conjuntos corresponde a relaciones definidas de A en B:

$$R1 = \{(2, 1), (3, 1)\}$$
$$R2 = \{(2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$$
$$R3 = \{(2, 4), (3, 5)\}$$

La relación R1 se puede definir como el conjunto de pares cuyo segundo elemento es 1, esto es, $R1 = \{(x, y) / y = 1\}$.

La relación R2 está formada por los pares cuyo primer componente es menor que el segundo componente, $R2 = \{(x, y) / x < y\}$

Y la relación R3 está conformada por todos los pares que cumplen con que el segundo componente es dos unidades mayor que el primer componente, dicho de otro modo, $R3 = \{(x, y) / y = x + 2\}$

Así, se puede continuar enumerando relaciones definidas a partir de A x B. Como se puede ver, la regla que define la relación se puede escribir mediante **ecuaciones** o **desigualdades** que relacionan los valores de x e y. Estas reglas son un medio conveniente para ordenar en pares los elementos de los dos conjuntos.

Ejemplo 2

Dados los conjuntos $C = \{1, -3\}$ y $D = \{2, 3, 6\}$, encontrar todos los pares ordenados (x, y) que satisfagan la relación

$$R = \{(x, y) / x + y = 3\}$$

Solución

El producto cartesiano de C x D está formado por los siguientes pares ordenados

$$C \times D = \{(1, 2), (1, 3), (1, 6), (-3, 2), (-3, 3), (-3, 6)\}$$

Las parejas ordenadas que satisfacen que la suma de sus componentes sea igual a 3 son:

$$R = \{(1, 2), (-3, 6)\}$$

Toda relación queda definida si se conoce el conjunto de partida, el conjunto de llegada y la regla mediante la cual se asocian los elementos. En el ejemplo anterior, el conjunto de partida corresponde al conjunto **C**, el conjunto de llegada es el conjunto **D** y la expresión $x + y = 3$ es la regla que asocia los elementos de los dos conjuntos.

Dominio y rango de una relación

El dominio de una relación es el conjunto de preimágenes, es decir, el conjunto formado por los elementos del conjunto de partida que están relacionados. Al conjunto de imágenes, esto es, elementos del conjunto de llegada que están relacionados, se lo denomina también recorrido o rango.

Ejemplo 3

Sea A = {1, 2, 3, 4} y B = {4, 5, 6, 7, 8} y R la relación definida de A en B determinada por la regla "*y* es el doble de *x*" o "$y = 2x$", encontrar dominio y rango de la relación.

Solución

El total de pares ordenados que podemos formar, o producto cartesiano es:

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8)\}$$

Pero los pares que pertenecen a la relación R (y = 2x) son solo:

$$\mathbf{R = \{(2, 4), (3, 6), (4, 8)\}}$$

En esta relación vemos que: "4 es el doble de 2"; esto es, "4 es la imagen de 2 bajo R", dicho de otro modo, "2 es preimagen de 4".

Así, el dominio e imagen son:

$$\mathbf{D = \{2, 3, 4\}}$$
$$\mathbf{I = \{4, 6, 8\}}$$

Según lo que vemos, ¿qué relación hay entre el Dominio y el conjunto de partida?

En el Dominio falta el elemento 1 del conjunto de partida, por lo tanto, el Dominio es un subconjunto de A.

Otra pregunta: ¿Todo elemento del conjunto de llegada es elemento del rango? La respuesta es no, pues en el rango faltan el 5 y el 7.

Representación gráfica de las relaciones

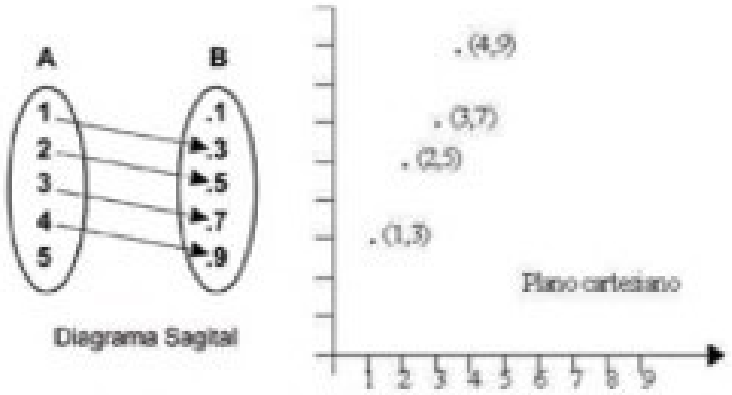
Los pares ordenados se pueden representar gráficamente por medio de diagramas sagitales o por medio de puntos en el plano cartesiano.

Ejemplo: Si A = {1, 2, 3, 4, 5} y B = {1, 3, 5, 7, 9} y R la relación definida por la regla $R = \{(x, y) / y = 2x + 1\}$, graficar R.

Los pares ordenados que pertenecen a la relación (que cumplen con $y = 2x + 1$) son:

$$R = \{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9)\}$$

Y la gráfica correspondiente es la siguiente:



Función

Definición

Una función es una relación a la cual se añade la condición de que a cada valor del Dominio le corresponde uno y sólo un valor del recorrido.

De la definición anterior podemos deducir que todas las funciones son relaciones, pero no todas las relaciones son funciones.

También debemos agregar que toda ecuación es una relación, pero no toda ecuación es una función.

Llamaremos x a los elementos del Dominio (D_f) e y a los elementos del codominio o imagen (I_f). A la función la llamaremos f, por lo que cada elemento del codominio será: $y = f(x)$ (y es función de x).

Definiendo formalmente: una función es una relación entre dos variables que cumple con las condiciones de existencia y unicidad. La variable x llamada "independiente" y la variable y llamada "dependiente".

- Existencia: todo elemento del Dominio está relacionado con un elemento del codominio.

Sea f una relación de dominio D_f y de conjunto llegada I_f. Si cumple la condición de existencia:

$$\forall\, x \varepsilon\, D_f, \exists\, y / (x,y)\, \varepsilon\, f$$

(Para todo x que pertenece a D_f, existe un y tal que (x,y) pertenece a f)

- Unicidad: implica que cada elemento de D_f está relacionado con solo un elemento de I_f.

Entonces:

$$Si\,(x,y)\,\varepsilon\, f \wedge (x,z)\,\varepsilon\, f \Rightarrow y = z$$

(Si el par (x,y) pertenece a la función y el par (x,z) pertenece a la función, entonces $y = z$). Es decir, un elemento x de D_f no puede estar relacionado con dos elementos distintos de I_f.

Funciones inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

Función Inyectiva (uno a uno)

Definición: Una función es inyectiva o uno a uno y se denota como "a diferentes elementos del dominio le corresponden diferentes elementos del codominio".

Sea **M** el conjunto de mujeres con hijos, **H** el conjunto de los hijos y F la función que asocia a cada mujer con su hijo primogénito. Es una función inyectiva.

Simbólicamente: $Sea\ x_1, x_2 \in D_f, si\ f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

(llamamos D_f al dominio de la función).

Para comprobar gráficamente que una función es 1-1 hasta con comprobar que toda recta paralela al eje x corta a la gráfica de la función en un solo punto.

Función Sobreyectiva

Definición: Una función es sobreyectiva si todo elemento de su imagen es imagen de por lo menos un elemento de su Dominio. Una función es sobreyectiva si se cubre totalmente el conjunto de llegada.

Simbólicamente: $\forall y \in I_f, \exists x \in D_f \ / \ f(x)=y$

(para todo *y* que pertenece a la imagen de la función, existe un *x* que pertenece al dominio de la función, tal que *y es función de x).*

Función Biyectiva

Definición: Una función es biyectiva si al mismo tiempo es inyectiva y sobreyectiva, y la relación entre los elementos del dominio y los del codominio es biunívoca.

Función inversa

Definimos,

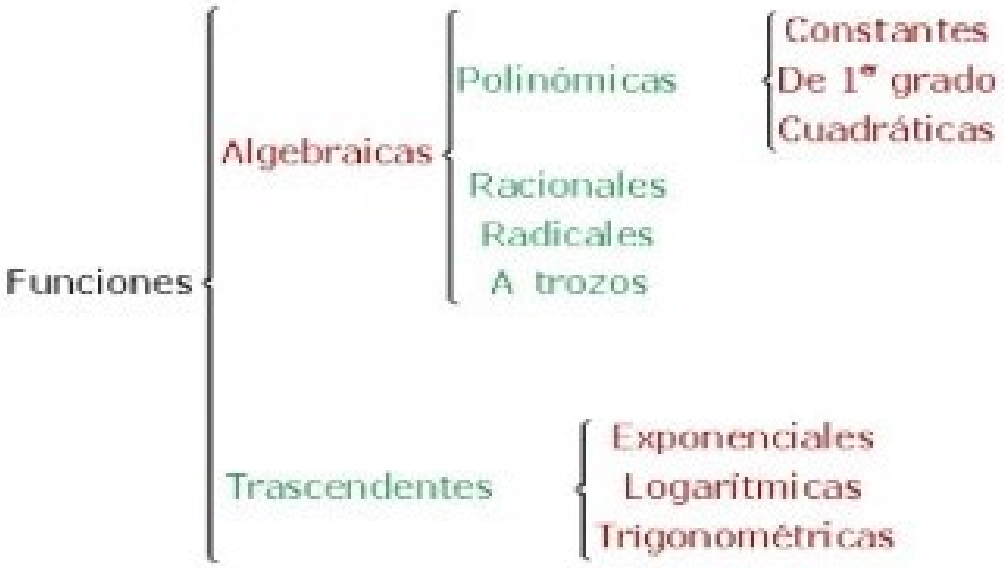
$Sea\ f: D_f \to I_f, una\ función\ biyectiva, existe\ una\ función\ f^{-1}: I_f \to D_f,$
que se llama "función inversa".

Podemos ver que: $I_{f^{-1}} = D_f, \quad D_{f^{-1}} = I_f$

Para hallar la inversa de una función biyectiva, se cambian "x" por "y" e "y" por "x", y se despeja la nueva variable dependiente "y". La relación resultante es la "función inversa" y se denota con "f^{-1}".

Sea f una función biyectiva. Entonces su función inversa es "f^{-1}". Son simétricas con respecto a la gráfica de la función identidad y = x

Clasificación de funciones



Funciones algebraicas

En las funciones algebraicas las operaciones que hay que efectuar con la variable independiente son: la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Las funciones algebraicas pueden ser:

1.- Funciones explicitas

En las funciones explicitas se pueden obtener las imágenes de x por simple sustitución.

Ejemplo: $f(x) = y = 5x - 2$

2.- Funciones implicitas

En las funciones implicitas no se pueden obtener las imágenes de x por simple sustitución, sino que es preciso efectuar operaciones.

$5x - y - 2 = 0$

Funciones polinómicas

Las **funciones polinómicas** vienen definidas por un polinomio.

$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$

Su dominio es $\mathbb{R}$, es decir, cualquier número real tiene imagen.

Funciones constantes

El criterio viene dado por un número real; **f(x)= k**

La gráfica es una recta horizontal paralela al eje de abscisas.

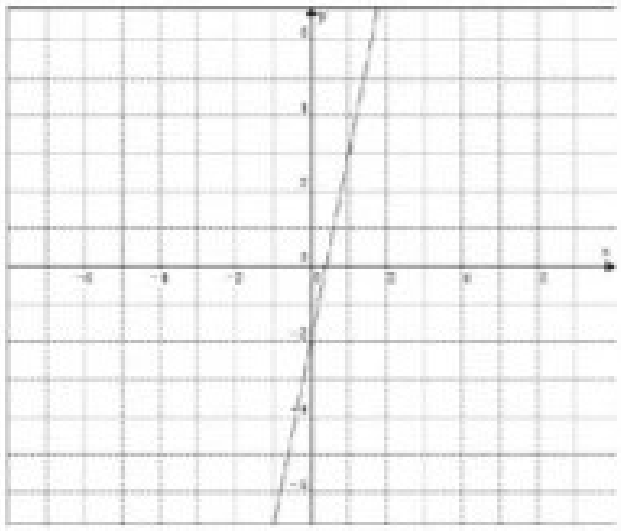
Funciones polinómicas de primer grado

Función afín: f(x) = y=mx +n

Su gráfica es una recta oblicua, que queda definida por dos puntos de la función.

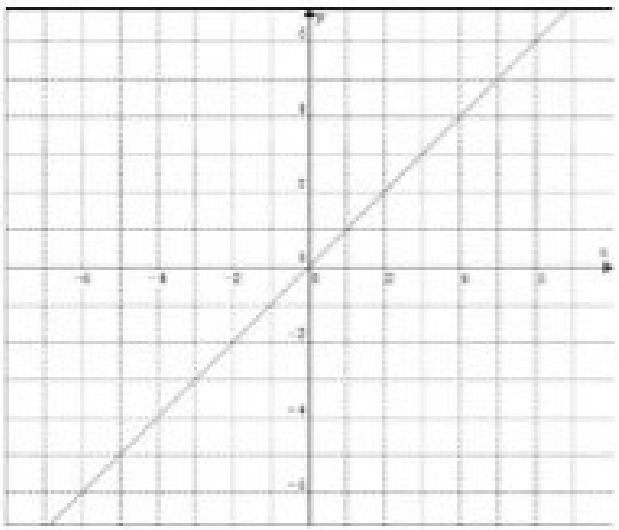
Ejemplo: f(x) = 5x – 2, valorizando la variable independiente, obtenemos la variable dependiente.

x	$f(x) = 5x - 2$
1	$5.1 - 2 = 3$
0	$5.0 - 2 = -2$
-1	$5.(-1) - 2 = -7$



Función identidad: *f(x)*= y = x

Su gráfica es la bisectriz del primer y tercer cuadrante.



Funciones cuadráticas

F(x) = ax^2 + bx +c=y

Son funciones polinómicas de segundo grado, siendo su gráfica una parábola de eje vertical.

Representación gráfica de la parábola

Podemos construir una parábola a partir de estos puntos:

- *Vértice:* (x_v, y_v), siendo:

$$x_v = \frac{-b}{2a}, \quad y_v = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$$

- Eje de simetría de la parábola; resulta ser una recta vertical que pasa por el vértice de ecuación:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

- Puntos de corte con el eje OX: cuando la parábola corta al eje OX, tendremos

y = 0, segunda coordenada del par (x, y) nula.

La ecuación: $ax^2 + bx + c = y$ resulta: $ax^2 + bx + c = 0$

Resolviendo la ecuación podemos obtener los puntos de corte:

Dos puntos de corte: $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$, si $b^2 - 4ac > 0$

Un punto de corte: $(x_1, 0)$, si $b^2 - 4ac = 0$

Ningún punto de corte, si $b^2 - 4ac < 0$

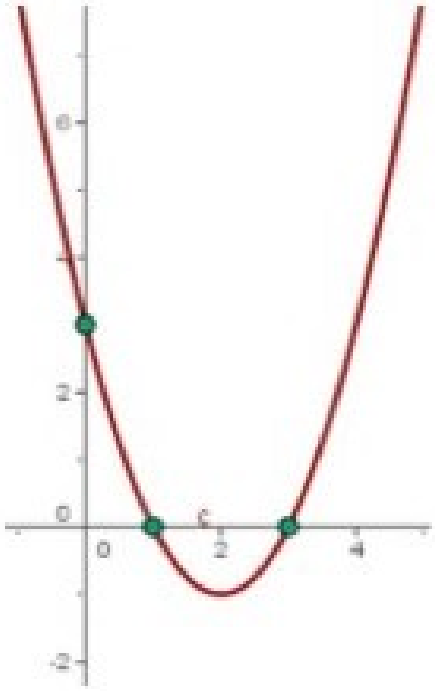
- Punto de corte con el eje OY: En el eje de ordenadas la primera coordenada es cero, por lo que tendremos:

$$f(0) = y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c \qquad (0, c)$$

Ejemplo: Representar la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

- *Vértice* $Xv = -(-4) / 2 = 2 \quad y_v = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$

  V (2, –1)
- *Puntos de corte con el eje OX:* $x^2 - 4x + 3 = 0$
- $\Rightarrow \quad x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ *Puntos: (3,0) y (1,0)*
- *Punto de corte con el eje OY (0, 3)*



Funciones a trozos

Son funciones definidas por distintos criterios, según los intervalos que se consideren. Las funciones en valor absoluto se transforman en funciones a trozos.

Función valor absoluto

Las funciones en valor absoluto se transforman en funciones a trozos, siguiendo los siguientes pasos:

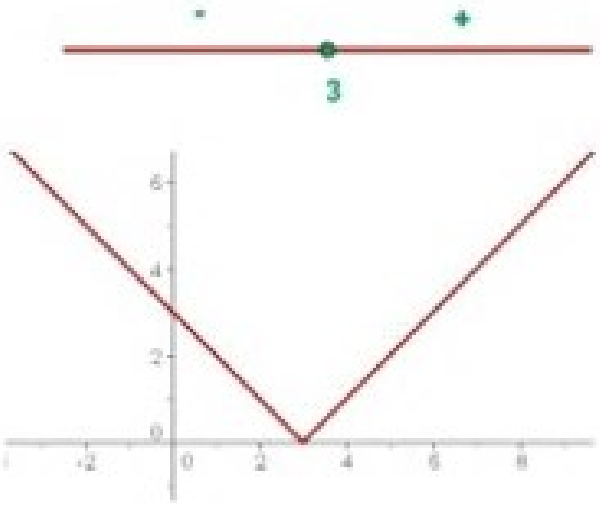
1. Se iguala a cero la función, sin el valor absoluto, y se calculan sus raíces.
2. Se forman intervalos con las raíces y se evalúa el signo de cada intervalo.
3. Definimos la función a trozos, teniendo en cuenta que en los intervalos donde la x es negativa se cambia el signo de la función.
4. Representamos la función resultante.

Ejemplos:

1.- $f(x) = |x - 3|$

$\Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

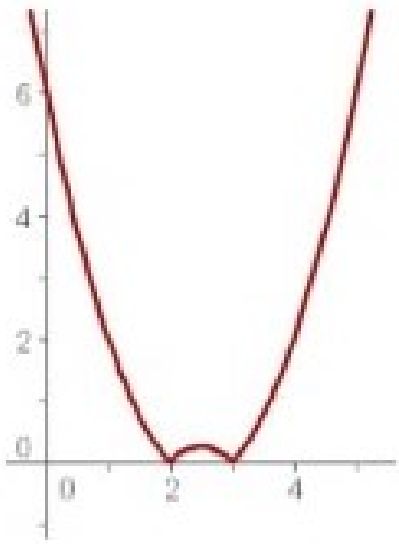
$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & si \quad x \geq 3 \\ -(x - 3) & si \quad x < 3 \end{cases}$$



2.- $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ $\quad$ **D = R**

$x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad x = 2 \qquad x = 3$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & si \quad x < 2 \\ -(x^2 - 5x + 6) & si \quad 2 \leq x < 3 \\ x^2 - 5x + 6 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$



Definición y propiedades del valor absoluto

Definición

$|x| = \{x$, si $x \geq 0$

$|x| = \{-x$, si $x < 0$

$|x|$ se lee como *el valor absoluto de x*.

Ejemplo

Escriba $|3-\pi|$ sin usar valor absoluto.

Solución

Determinar el signo al número $3-\pi$

Como el número $3-\pi$ es negativo, el valor absoluto le cambia de signo:

$$|3-\pi| = -(3-\pi)$$

Propiedades

1.- $|a| = 0$ si $a = 0$

2.- $|a| \geq 0$

3.- $|-a| = |a|$

De la propiedad 3, aplicada a $a-b$, tenemos las siguientes:

Proposiciones

4.- $|a \cdot b| = |a||b|$ Propiedad multiplicativa

5.- $|a^n| = |a|^n$, para n entero positivo o cero.

Decimos que el valor absoluto preserva las operaciones de la multiplicación, división y potenciación. Pero este comportamiento no lo tiene frente a la suma y resta.

Teoremas:

Teorema I: Para $c>0$ tenemos que

a) $|x| \leq c$ *entonces*: $-c \leq x \leq c$

b) $|x| \geq c$ *entonces*: $x \leq -c \ \vee \ x \geq c$

Teorema II

Si $|x| < |y|$ entonces $x^2 < y^2$

Ecuaciones con más de un valor absoluto

Método de las regiones

Ecuaciones más generales que las vistas, en que no es posible aplicar alguna propiedad, pueden ser resueltas aplicando la definición del valor absoluto. Para eso se necesitará dividir la recta en regiones, tales que las expresiones dentro de las barras conservarán el signo a lo largo de cada región. Dichas regiones son intervalos delimitados por las raíces de las expresiones entre las barras del valor absoluto. Se buscará entonces la solución de la ecuación en cada región.

El conjunto solución de la ecuación con valor absoluto es la unión de los conjuntos soluciones en los intervalos.

En el desarrollo del siguiente ejemplo explicaremos algunos detalles de este método conocido como el método de regiones, indicando el procedimiento.

Ejemplo

Resolver la ecuación $|x-2|+2|x+1|=4$.

Solución

1.- Marcar en la recta real los números que hagan cero alguna de las expresiones entre las barras del valor absoluto.

2.- Determinar los signos de las expresiones entre las barras en cada intervalo.

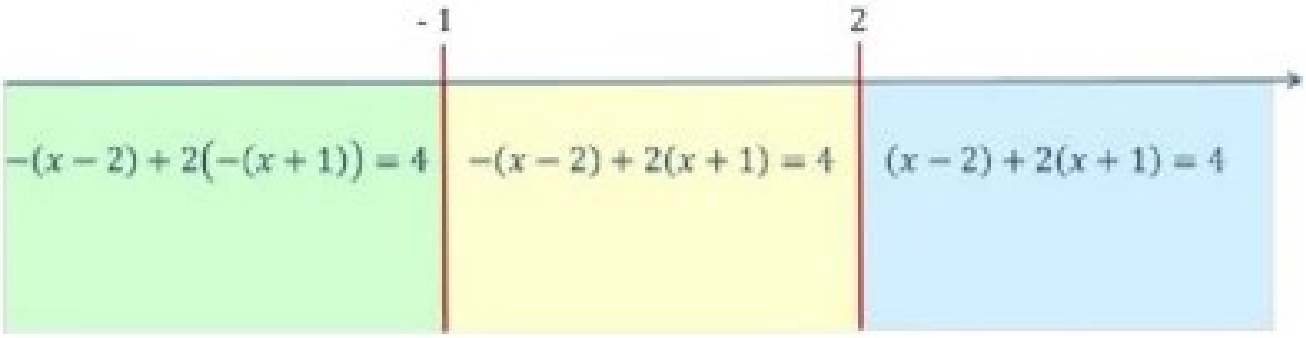
3.- En cada intervalo, transformar la ecuación en otra equivalente sin valores absolutos, *aplicando la definición del valor absoluto.*

4.- Tomando en cuenta que el valor absoluto a una cantidad positiva la deja igual y que a una cantidad negativa le cambia el signo, podemos aplicar la definición de valor absoluto a la ecuación en cada intervalo para quitar el valor absoluto.

En los intervalos en que $|x+1|$ es negativo, se tiene que $|x+1| = -(x+1)$

En los intervalos en que $|x+1|$ es positivo, se sustituirá $|x+1|$ por $x+1$

De manera similar consideramos $|x-2|$.



5.-Establecer el conjunto solución.

En cada intervalo, transformar la ecuación en otra equivalente sin valores absolutos, aplicando la definición del valor absoluto.

Por definición:

$$|x-2|\begin{cases} x-2 & si \quad x \geq 2 \\ -x+2 & si \quad x(2 \end{cases} \qquad |x+1|\begin{cases} x+1 & si \quad x \geq -1 \\ -x-1 & si \quad x(-1 \end{cases}$$

Analizamos por regiones, resolviendo cada ecuación y eliminando las soluciones que no estén en el intervalo respectivo.

Si $x(-1$ *la ecuación resulta*: $(-x+2)+2(-x-1)=4 \Rightarrow x=-\frac{4}{3}$

Si $-1 \leq x \leq 2$ *la ecuación resulta*: $(-x+2)+2(x+1)=4 \Rightarrow x=0$

Si $x \geq 2$ *la ecuación resulta*: $(x-2)+2(x+1)=4 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$,

este valor no pertenece al intervalo o región correspondiente, por lo tanto, no es solución:

Establecemos el conjunto solución:

$$S=\left\{-\frac{4}{3},0\right\}$$

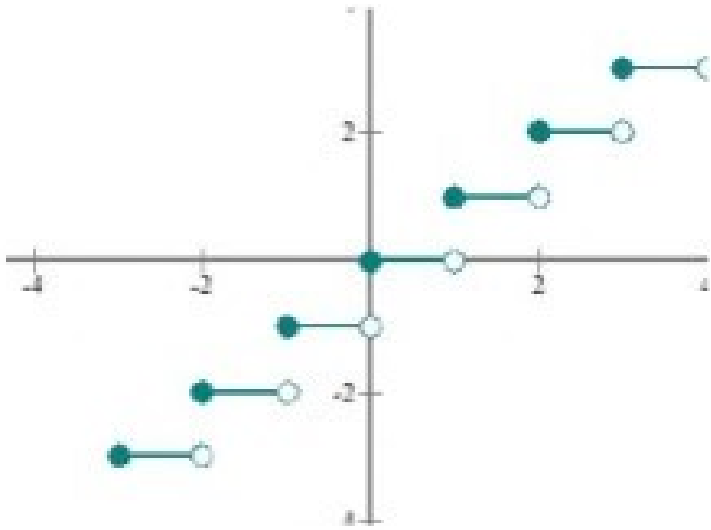
6.- Verificar.

Función parte entera de x

Hace corresponder a cada número real el número entero inmediatamente inferior:

$$F(x) = E(x)$$

x	y= E(x)
0	0
0.5	0
0.9	0
1	1
1.5	1
1.9	1
2	2

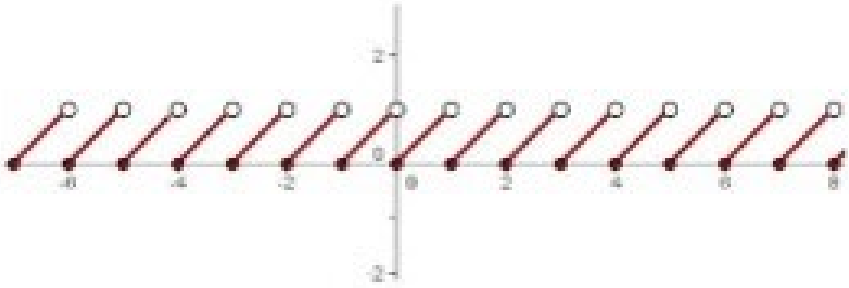


Función Mantisa

Hace corresponder a cada número el mismo número menos su parte entera:

$$F(x) = x - E(x)$$

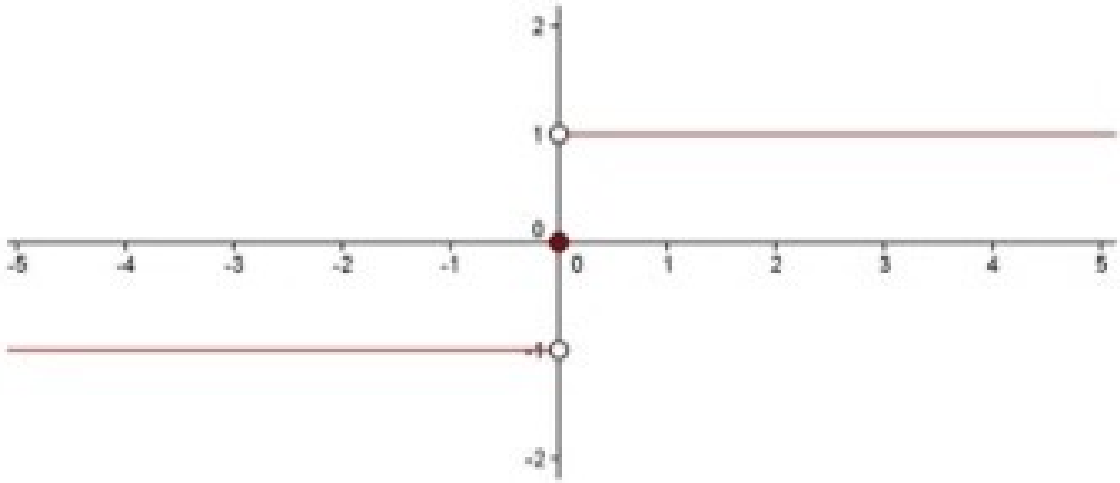
x	y= x-E(x)
0	0
0.5	0.5
0.9	0.9
1	0
1.5	0,5
1.9	0,9
2	0



Función signo

$$F(x) = sgn(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x < 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$$



Funciones racionales

El criterio viene dado por un cociente entre polinomio:

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m}$$

El dominio es formado por todos los números reales excepto los valores de x que anulan el denominador.

Funciones radicales

El criterio viene dado por la variable x bajo el signo radical.

El dominio de una función radical de índice impar es **R,** o sea, todos los Reales.

El dominio de una función radical de índice par está formado por todos los valores que hacen que el radicando sea mayor o igual que cero.

Función trascendente (Curva trascendente)

En matemática, una curva trascendental es aquella curva que no es algebraica. Definimos aquí como curva *C* al conjunto de puntos (normalmente sobre el plano). Por ejemplo, el círculo unitario es una curva algebraica (siendo precisos, los puntos reales de tal curva); la parametrización habitual mediante funciones trigonométricas puede implicar dichas funciones trascendentales, pero ciertamente el círculo unitario se define

mediante una ecuación polinómica. Esto se aplica no sólo a las curvas sinusoidales, por tanto, sino a grandes clases de curvas que muestran oscilación.

Otros ejemplos de curvas trascendentales son las gráficas de las cicloides y las funciones exponenciales y logarítmicas.

El origen del término se le atribuye a Leibniz.

Funciones Trigonométricas: Ver capítulo VI

Función exponencial

La función exponencial es del tipo:

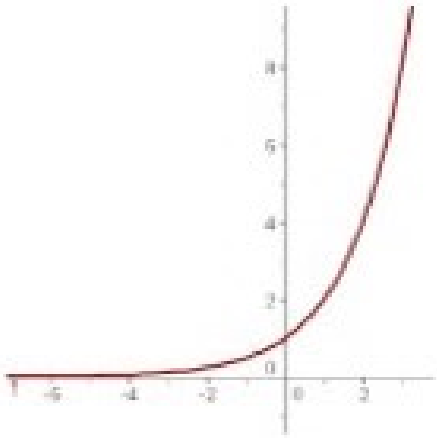
$$f(x) = a^x$$

Sea a un número real positivo. La función que a cada número real x le hace corresponder la potencia a^x se llama *función exponencial de base a y exponente x*.

Ejemplos:

$$f(x) = 2^x$$

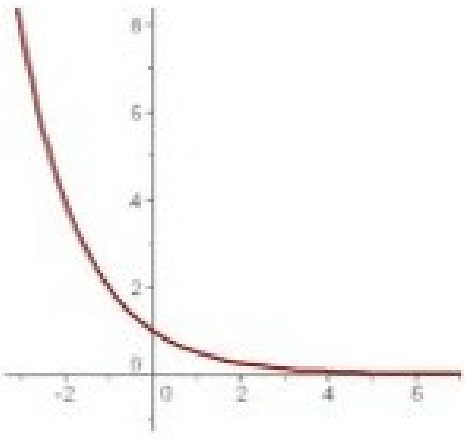
x	$y = 2^x$
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8



Dominio = Todos los Reales
Imagen= Todos los Reales mayores a cero
Intersección con Eje X: no tiene
Intersección con Eje Y: (0, 1)

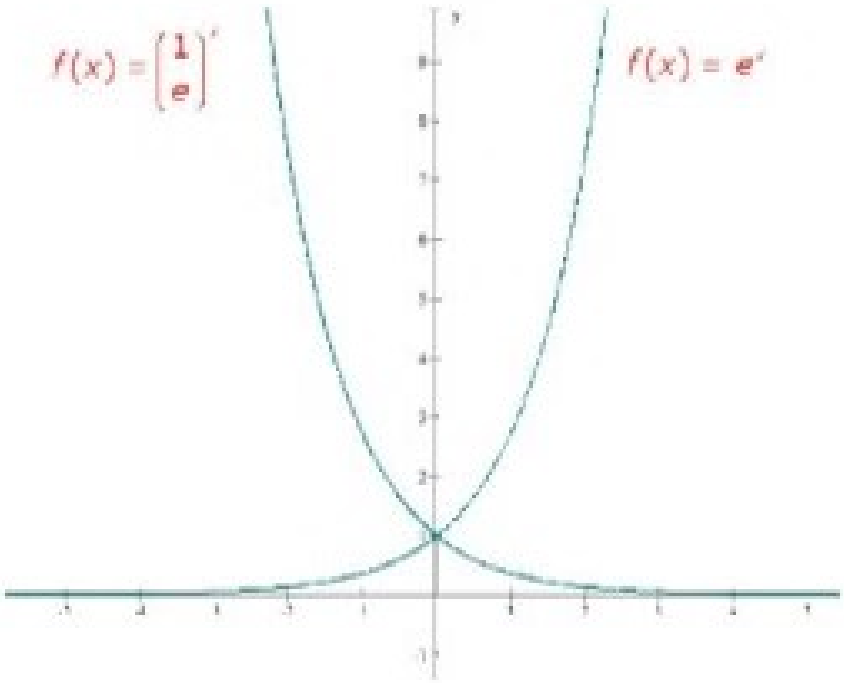
$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

x	$y = (½)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8



Propiedades de la función exponencial

- Dominio: $\mathbb{R}$.
- Recorrido: $\mathbb{R}^+$.
- Es continua.
- Los puntos (0, 1) y (1, a) pertenecen a la gráfica.
- Es inyectiva $\forall$ a ≠ 1(ninguna imagen tiene más de un original).
- Creciente si a > 1.
- Decreciente si a < 1.
- Las curvas $y = a^x$ e $y = (1/a)^x$ son simétricas respecto del eje OY.
- Ejemplo:



Definición de logaritmo

$$\log_a x = y \Rightarrow a^y = x \qquad a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

Siendo a la base, x el número e y el logaritmo.

$\log_2 4 = 2$ $\qquad 2^2 = 4$

$\log_2 1 = 0$ $\qquad 2^0 = 1$

Ejemplos:

1. $\log_{\frac{1}{2}} 0.25 = y$

$\left(\frac{1}{2}\right)^y = 0.25 \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \qquad y = 2$

2. $\log_{\sqrt{5}} 125 = y$

$\sqrt{5}^{y} = 125 \qquad 5^{\frac{1}{2}y} = 5^{3} \qquad y = 6$

3. $\log 0.001 = y$

$10^{y} = 0.001 \qquad 10^{y} = 10^{-3} \qquad y = -3$

4. $\ln \frac{1}{e^5} = y$

$e^{y} = \frac{1}{e^5} \qquad e^{y} = e^{-5} \qquad y = -5$

5. $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[5]{\frac{1}{81}} = y$

$\sqrt{3}^{y} = \sqrt[5]{\frac{1}{81}} \qquad 3^{\frac{1}{2}y} = 3^{-\frac{4}{5}} \qquad y = -\frac{8}{5}$

De la definición de logaritmo podemos deducir:

- No existe el logaritmo de un número con base negativa.

$$\nexists \log_{-a} x$$

- No existe el logaritmo de un número negativo.

$$\nexists \log_{a}(-x)$$

- No existe el logaritmo de cero.

$$\nexists \log_{a} 0$$

- El logaritmo de 1 es cero.

$$\log_{a} 1 = 0$$

- El logaritmo en base a de a es uno.

$$\log_a a = 1$$

- El logaritmo en base a de una potencia en base a es igual al exponente.

$$\log_a a^n = n$$

Propiedades de los logaritmos

1. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_2 (4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$$

2. El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_2 \left(\frac{8}{4}\right) = \log_2 8 - \log_2 4 = 3 - 2 = 1$$

3. El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.

$$\log_a (x^n) = n \log_a x$$

$$\log_2 (8^4) = 4 \log_2 8 = 4 \cdot 3 = 12$$

4. El logaritmo de una raíz es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz.

$$\log_a (\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \log_a x$$

$$\log_2 (\sqrt[4]{8}) = \frac{1}{4} \log_2 8 = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$$

5. Cambio de base:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b y}$$

$$\log_2 4 = \frac{\log_1 4}{\log_1 2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Tipos de logaritmos

1.- Logaritmos decimales
Son los que tienen base 10. Se representan por log(x).

2.- Logaritmos neperianos
Son los que tienen base e. Se representan por ln(x) o L(x).

Función Logarítmica

La función logarítmica en base a es la función inversa de la exponencial en base a.

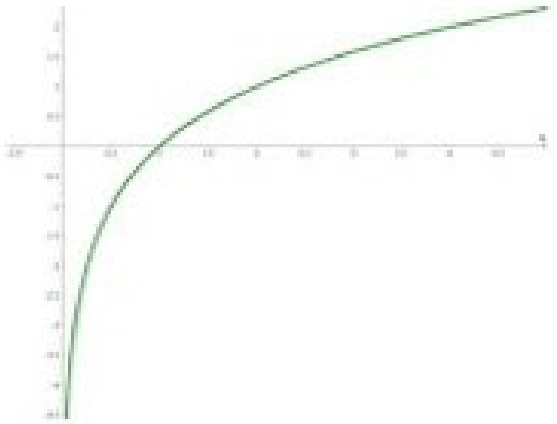
$$f(x) = \log_a x$$

$$a > 0, \quad a \neq 1$$

Ejemplos

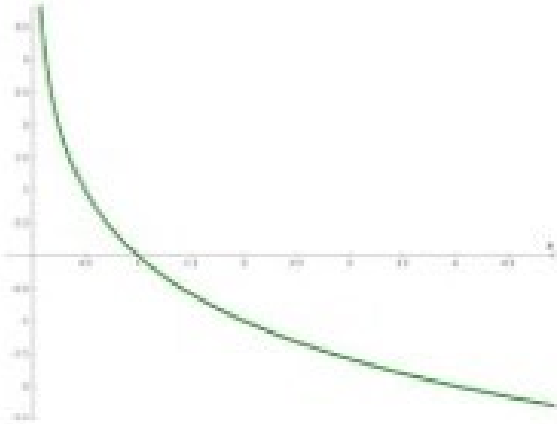
x	$y = \log_2 x$
1/8	-3
1/4	-2
1/2	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

$f(x) = \log_2 x$



x	$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
1/8	3
1/4	2
1/2	1
1	0
2	-1
4	-2
8	-3

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

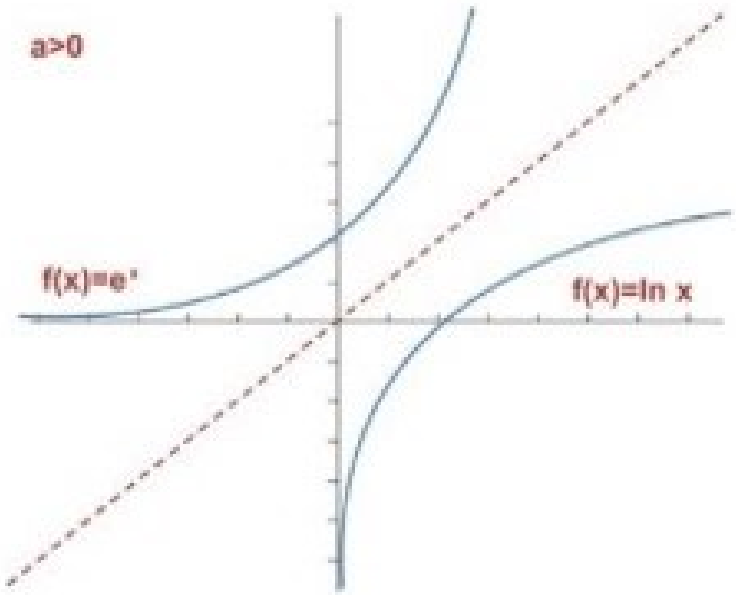


Propiedades de las funciones logarítmicas

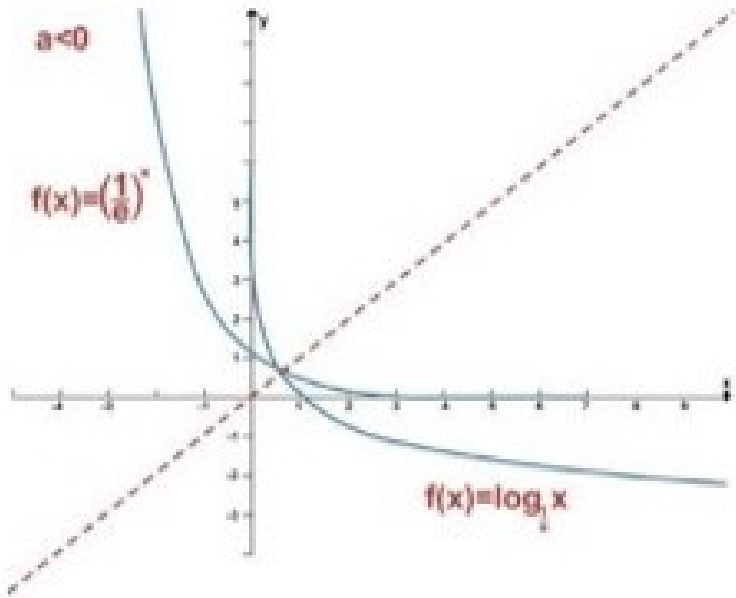
- Dominio: $\mathbb{R}^+$
- Recorrido: $\mathbb{R}$
- Es continua.
- Los puntos (1, 0) y (a, 1) pertenecen a la gráfica.
- Es inyectiva (ninguna imagen tiene más de un original).
- Creciente si a>1.
- Decreciente si a<1.
- La gráfica de la función logarítmica es simétrica (respecto a la bisectriz del 1º y 3º cuadrante) de la gráfica de la función exponencial, ya que son funciones recíprocas o inversas entre sí.

Ejemplos:

- Función e^x y su inversa



- Función $(1/e)^x$ y su inversa.

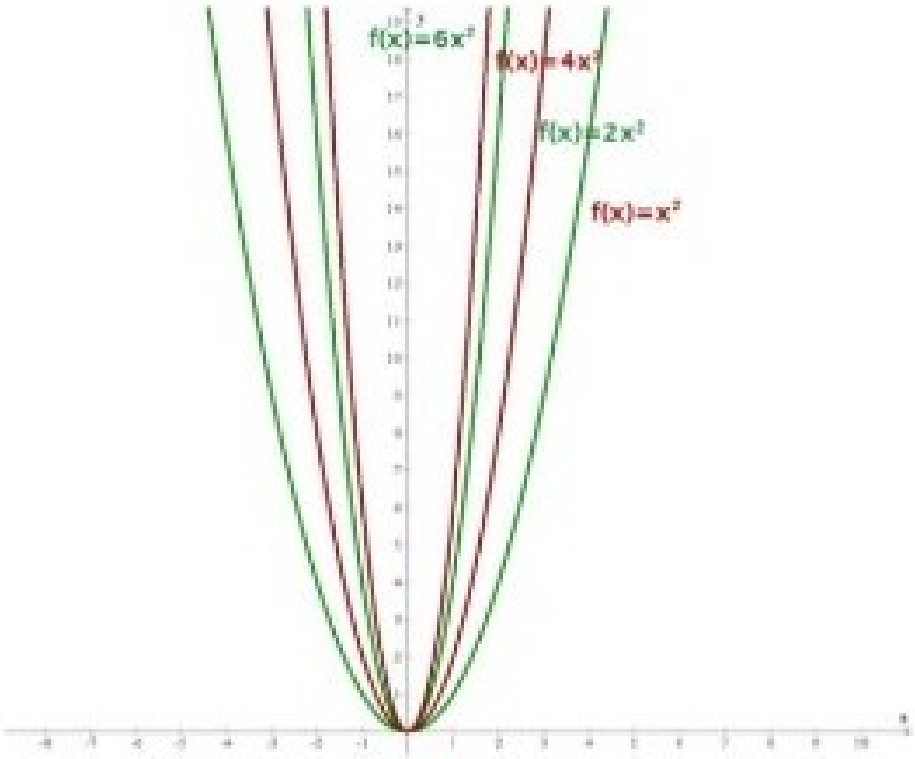


- En ambos casos, determinar dominio e imagen.
- En ambos casos, ¿son funciones biyectivas? ¿Por qué?

Contracción y dilatación de una función

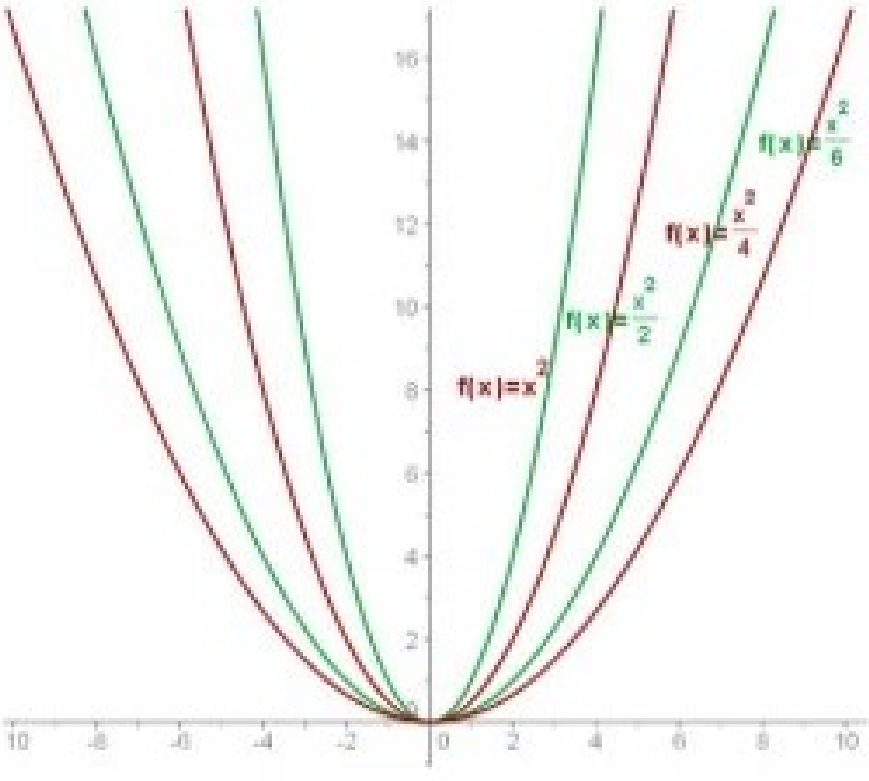
Contracción de una función

Una función f(k·x) se contrae si K > 1.



Dilatación de una función

Una función f(k·x) se dilata si 0 < K < 1.

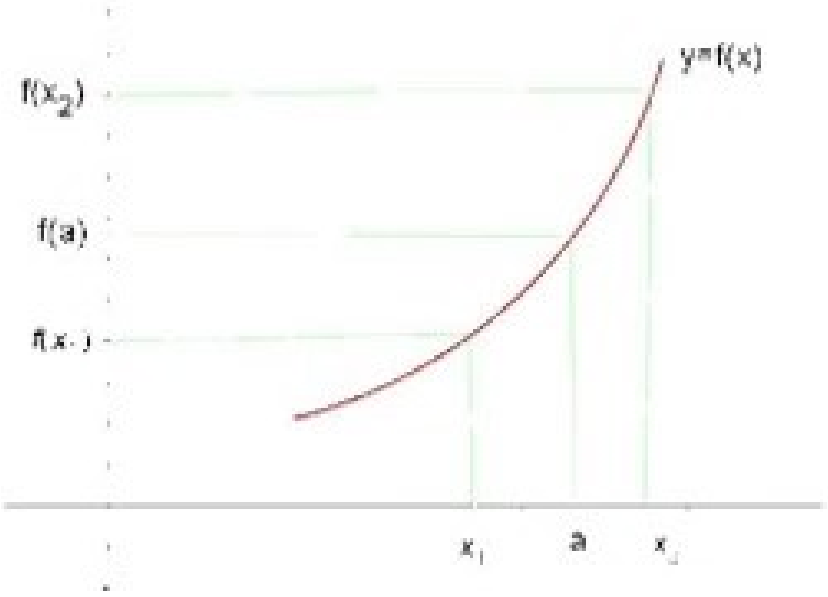


ArquiMática

Función creciente

f es **estrictamente creciente** en **a** si y sólo si existe un entorno de **a**, tal que para todo x que pertenezca al entorno de **a** se cumple:

$$x > a \Rightarrow f(x) > f(a)$$
$$x < a \Rightarrow f(x) < f(a)$$



Desafíos

1.- A partir de la definición anterior, completar la siguiente proposición:
f es **estrictamente decreciente** en **a**.....

2.- Teniendo en cuenta las funciones trigonométricas, determinar para todas ellas los rangos de crecimiento y decrecimiento.

3.- De las funciones logarítmicas y exponenciales, determinar cuáles son crecientes y cuáles decrecientes.

4.- Funciones lineales:
- ¿Cuándo crecientes?
- ¿Cuándo decrecientes?
- ¿Cuándo constantes?

5.- Funciones cuadráticas:
- ¿Cuándo crecientes?
- ¿Cuándo decrecientes?
- ¿Cuándo constantes?

6.- Funciones a trozos:

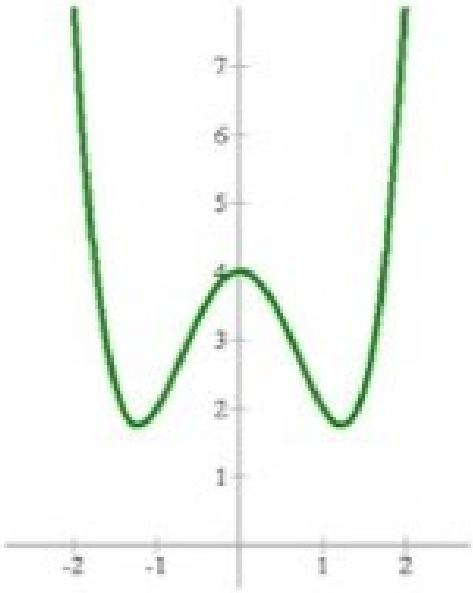
- ¿Cuándo crecientes?
- ¿Cuándo decrecientes?
- ¿Cuándo constantes?

Función par

Una función es par si cumple que: **f(-x) = f(x)**

Una función es simétrica respecto del eje de ordenadas si esta es una función par.

Ejemplo: $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$

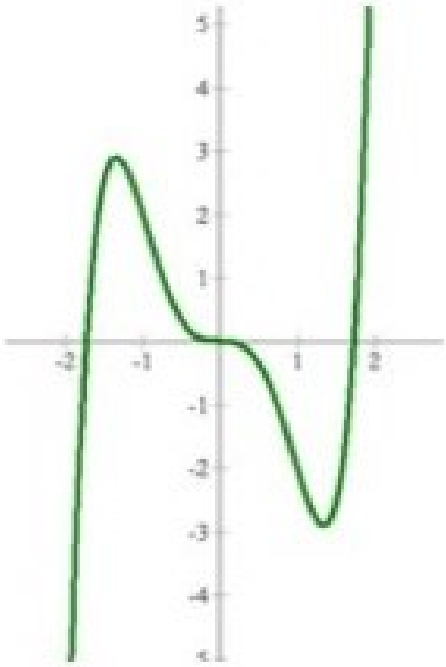


Función impar

Una función es impar si cumple que: **f(-x) = -f(x)**

Una función es simétrica respecto al origen si esta es una función impar.

$f(x) = x^5 - 3x^3$



Intersección con los ejes

Si x = 0 la curva interseca al eje vertical de las ordenadas.
Si y = 0 la curva interseca al eje horizontal de las abscisas.

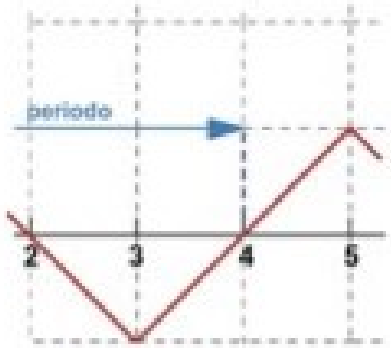
Desafío

Teniendo en cuenta las funciones trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, lineales, cuadráticas y a trozos, determinar para todas ellas las intersecciones con los ejes.

Periodicidad de una función

Vamos a tratar ahora otro aspecto de las funciones que nos facilitan tanto su estudio como su representación: la periodicidad. Veremos cómo reconocer una función periódica (que siempre será más fácil de forma gráfica) y estudiaremos sus características más importantes. Esta característica permite una nueva clasificación de las funciones en funciones periódicas y no periódicas.

Este tipo de funciones no nos es tan ajeno como nos puede parecer. Un ejemplo presente en nuestro día a día lo encontramos en las manecillas del reloj, o incluso en las fases de la luna.



Definición formal: Diremos que una función f(x) es periódica cuando exista un número real T, tal que el valor de la función en el punto x coincida con el valor de la función en el punto x+T: **f(x) = f(x+T).**

Una función f(x) es periódica, de período **T**, si para todo número entero z, se verifica:
f(x) = f(x + zT)

Llamamos periodo al número real T que nos indica cada cuanto se repite la función.

O, dicho de otro modo, una función es periódica cuando el trazo de la función se repite cada cierto intervalo de la x siguiendo el mismo patrón.

Como podemos ver en la imagen anterior, esta función es periódica porque su trazo se repite cada cuatro valores. Por tanto, su periodo es 4: T = 4. Si analizamos la función, podemos comprobar que f(1) = f(1+ 4) = f(5).

Período de funciones trigonométricas

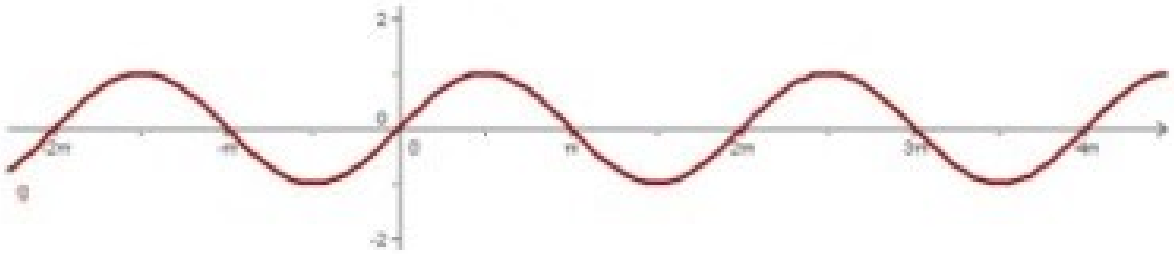
Todas las funciones trigonométricas son periódicas.

La función seno y coseno, f(x)=sen x y g(x)=cos x, son periódicas de periodo 360°.

Función seno

La función **f(x) = sen x** es periódica de periodo 2p, ya que cumple que:

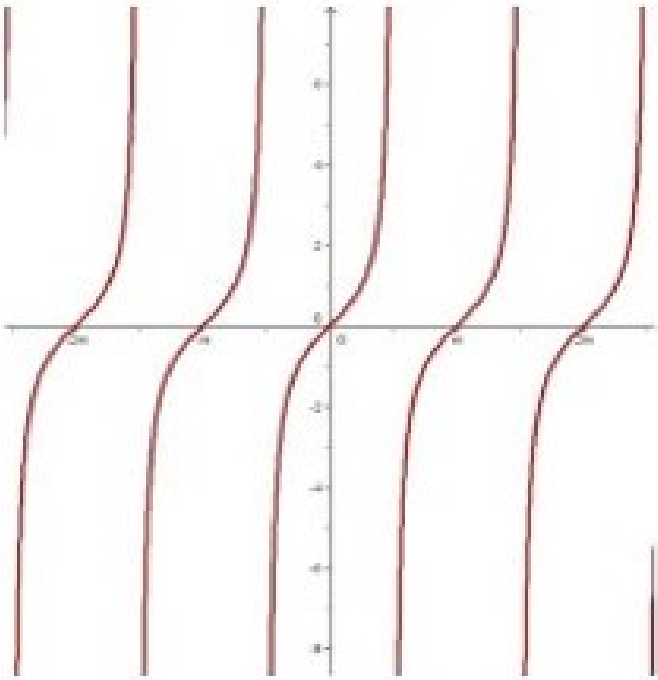
$$\text{Sen } (x + 2\,p) = \text{Sen } x$$



Función tangente

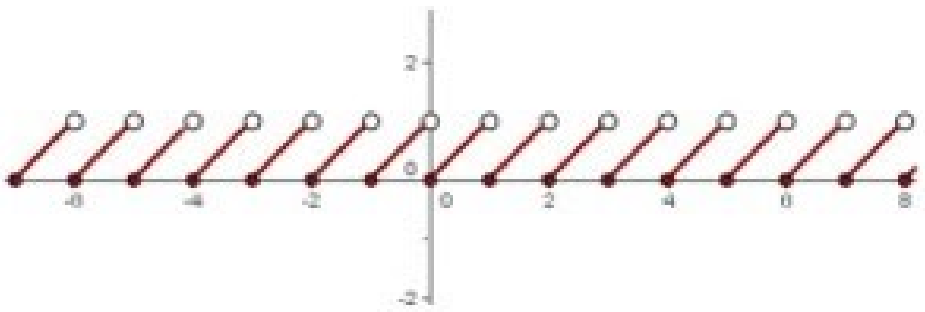
La función **f(x) = tg x** es periódica de periodo π, ya que cumple que:

$$\mathbf{tg\ (x + \pi) = tg\ x}$$



Función mantisa

La función mantisa, f(x) = x - E(x), es periódica de periodo 1.



Cálculo del periodo

Si tenemos una función periódica f(x) de periodo T, la función g(x) = f(kx) tiene de periodo:

$$T' = \frac{T}{k}$$

Ejemplos:
Hallar el periodo de las funciones:

1. f(x) = sen 2x

$$T' = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

2. f(x) = tg (1/2)x

$$T' = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$$

3. f(x) = E (1/2)x

$$T' = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Conocidos los casos principales en las funciones trigonométricas, podemos hallar el periodo de cualquier función teniendo en cuenta una serie de propiedades:

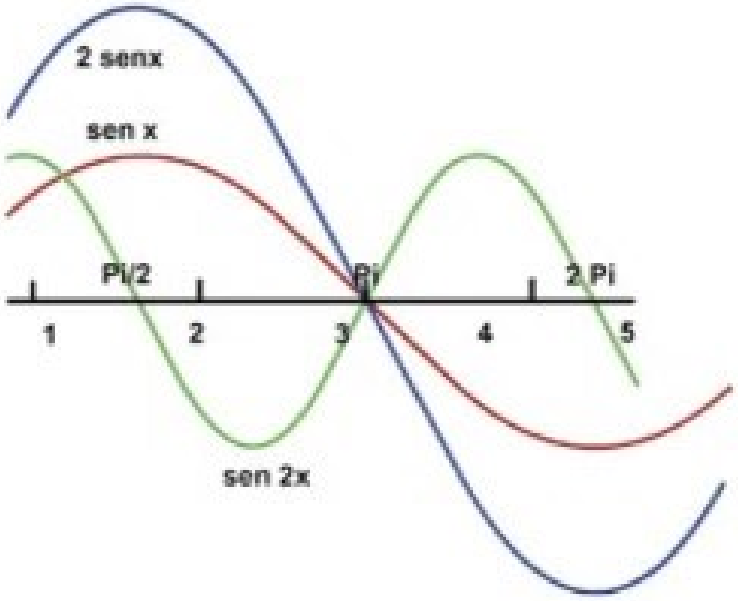
1- Dada una función periódica f(x) con periodo T, entonces la función que se obtiene al multiplicar la x por un número cualquiera (cambio de escala): **g(x)= f (k·x)** también es periódica y el nuevo periodo se obtiene dividiendo el anterior por un número cualquiera:
T'=T/k.

2- Dada una función periódica f(x) con periodo T, entonces la función que se obtiene multiplicando y sumando al término independiente por números reales **g(x) = f(m·x+n)** también es periódica, y el nuevo periodo es el mismo que en el caso anterior: **T'=T/m** (no le afectan los cambios de origen).

Ejemplo: Hallar el periodo de la función f(x) = sen 2x.

Como ya hemos mencionado, conocido el valor del periodo de la función f(x) = sen x, T= π. Entonces, aplicando la primera propiedad, el nuevo periodo es: T'= π /2.

Como podemos apreciar en la siguiente imagen, se mantiene la misma forma, pero se reduce el periodo como podemos ver en el trazo en verde.



Si nos fijamos, no es lo mismo multiplicar por 2 el término independiente que la función, como podemos apreciar en el trazo azul.

Curvas exóticas

Las denominadas curvas exóticas son funciones que se expresan en distintos tipos de coordenadas o simplemente a través de su expresión general.

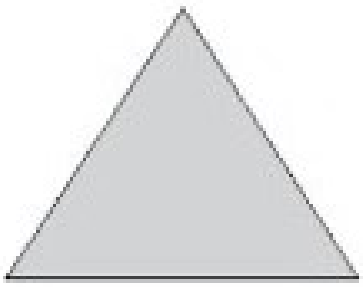
Son artificiales, generalmente, creaciones de matemáticos. Las curvas son infinitas y no están todas creadas ni descubiertas. A continuación, algunas de ellas:

- Curva de Koch
- Curvas de Peano
- Curvas Senoidales
- Clotoide de Cornu
- Catenaria (Velaría – Tractriz)
- Evolvente del círculo o circunferencia
- Óvalos de Cassini
- Concoide de Nicomedes
- Cisoide de Diocles
- Lemniscata de Bernoulli
- Folio de Descartes
- Espiral de Arquímedes - Espiral hiperbólica - Espiral logarítmica
- Cicloide
- Epicicloide
- Hipocicloide
- Evoluta de la elipse
- Estrofoide de Newton
- Cardioide y Nefroide de Pascal
- Transformadas Complejas
- Rosa polar

El creador en 1904 de este monstruo fue Niels Fabian Helge von Koch, matemático sueco.

Partamos de un triángulo equilátero de lado unidad. Dividimos en tres partes iguales de longitud 1/3 cada lado. Sustituimos el segmento central por dos segmentos de tamaño idéntico formando un diente como muestra la animación en la iteración n=1. Tenemos una curva poligonal P_1 de longitud $3 \cdot 4^{1-1}/3=4$. Repetimos la operación (n=2) con cada uno de los cuatro nuevos segmentos de cada uno de los "lados". Obtendremos así la curva P_2 de longitud $3 \cdot 4^2 \cdot 1/3^2=16/3$. La iteración indefinida nos proporciona la isla de Koch o copo de nieve de Koch.

n=0



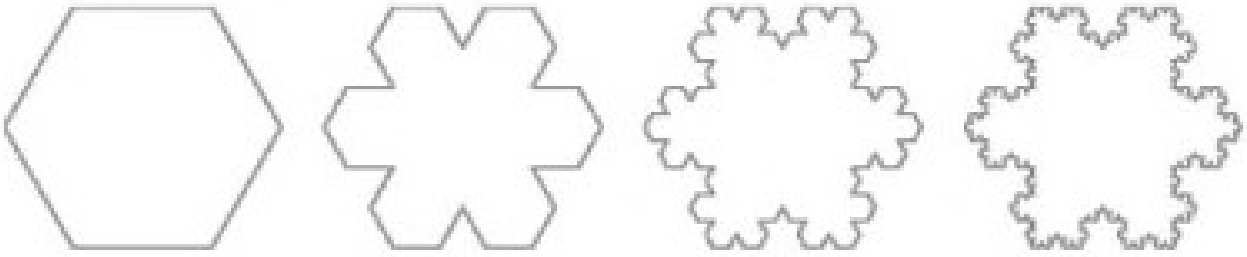
En la operación n-ésima la curva estará formada por $3 \cdot 4^n$ trozos, de perímetro $4^n/3^{n-1}$. La curva de Von Koch resulta del paso al límite de la sucesión de curvas P_n cuando n tiende a infinito. ¿Cuál es la longitud del perímetro de esta isla?

Será:

$$P_\infty = \lim_{n \to \infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \infty .$$

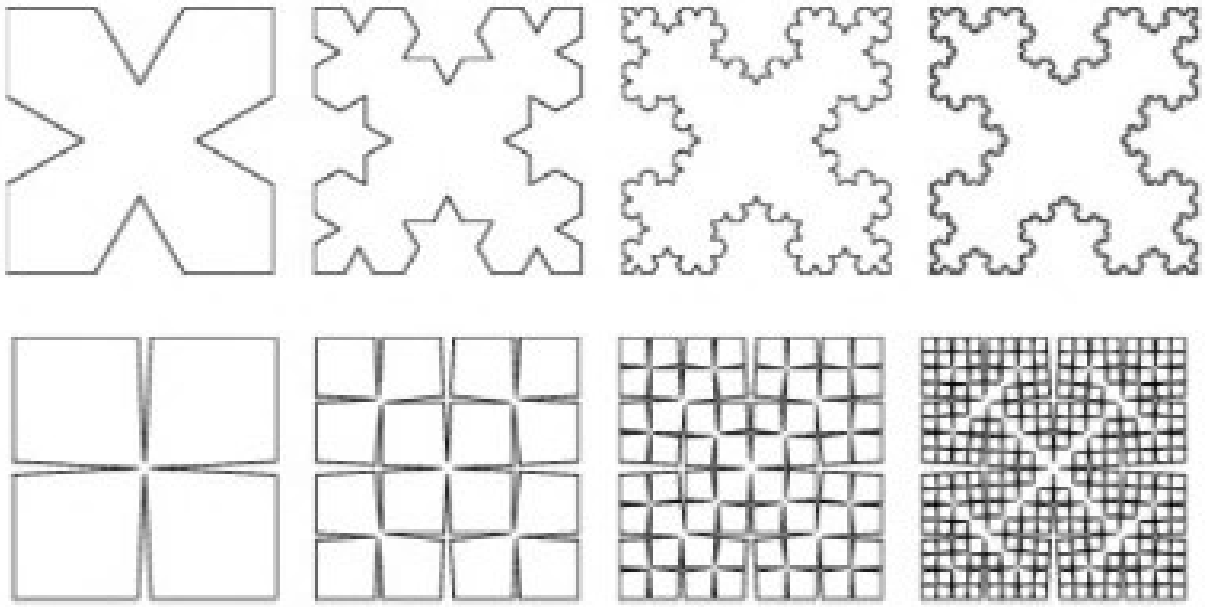
Es decir, aunque la isla de Von Koch ocupa una región limitada del espacio, un área finita, su perímetro es... ¡infinito!

Existen muchas variantes sobre la construcción de la curva de Kock. Abajo mostramos la curva de Koch exterior, que parte originalmente de un hexágono, en vez de un triángulo equilátero:



Abajo vemos dos versiones más que parten de un cuadrado. Se denominan fractales de Cesaro.

Observemos que la variación del ángulo se traduce en dos resultados finales bien diferentes.

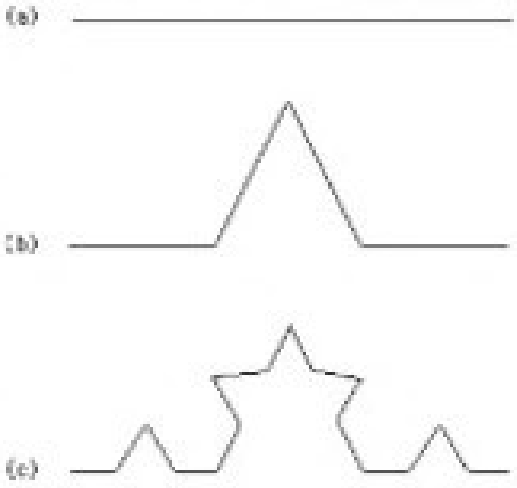


Ya en la Grecia clásica existían varias definiciones para el concepto de curva. Desde las curvas entendidas como la intersección de superficies, caso de las cónicas, a la de curva entendida como el lugar geométrico de la trayectoria recorrida por un punto. En el siglo XVII la geometría analítica asocia curvas y ecuaciones algebraicas. Más tarde, el cálculo diferencial acaba reservando el nombre *curva* a la función continua.

Las curvas que estamos acostumbrados a tratar son "suaves". Imaginemos que trazamos una tangente a una de estas curvas en uno de sus puntos. Ampliemos una zona microscópica alrededor del punto de tangencia: a medida que nos acercamos más y más al entorno "infinitesimal" del punto, la línea tangente se ajusta más y más a la curva. Decimos que localmente la curva es indistinguible de una línea recta. De forma similar ocurre con una superficie: sobre cada punto podemos trazar un plano de tangencia. Decimos, entonces, que localmente la superficie es indistinguible de un plano.

La contrapartida algebraica es que podemos determinar analíticamente el valor de la derivada de la curva en el punto de tangencia.

Si la curva representa la trayectoria de un móvil, el valor de la derivada en un punto nos proporciona su velocidad instantánea.



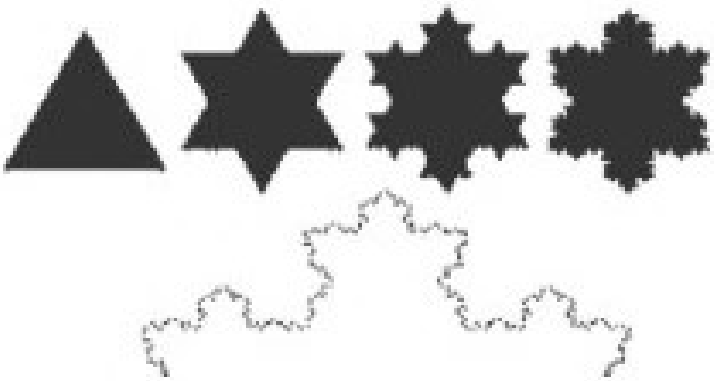
Observemos la recta (a). Es derivable en todos sus puntos. La curva (b), llamada diente de sierra, sin embargo, no lo es en todos ellos. Una curva quebrada no posee una tangente única en su punto de ruptura. Las derivadas por la derecha y por la izquierda no coinciden. Esto hace que la descripción de la curva se complique. La curva es continua, pero no derivable en ese punto. Para una curva poligonal como la función diente de sierra necesitamos una descripción analítica por partes. En la curva (b) nos encontramos con 3 puntos no derivables. La curva (c) es sencillamente la iteración n=2 de uno de los lados de la curva de Koch. Es continua, pero posee 15 puntos no derivables... Y, efectivamente, la curva de Koch es una curva continua en todos sus puntos pero no derivable en ninguno... ¡No podemos trazar tangente a ninguno de sus puntos!

Benoit Mandelbrot estuvo acertado al escoger el nombre "fractal" para estas criaturas geométricas. La palabra latina *fractus* significa quebrado. En sus propias palabras:

> *"I coined fractal from the Latin adjective fractus. The corresponding Latin verb frangere means "to break": to create irregular fragments. It is therefore sensible – and how appropriate for our needs! – that, in addition to "fragmented" (as in fraction or refraction), fractus should also mean "irregular", both meanings being preserved in fragment." (The Fractal Geometry of Nature,* página 4)

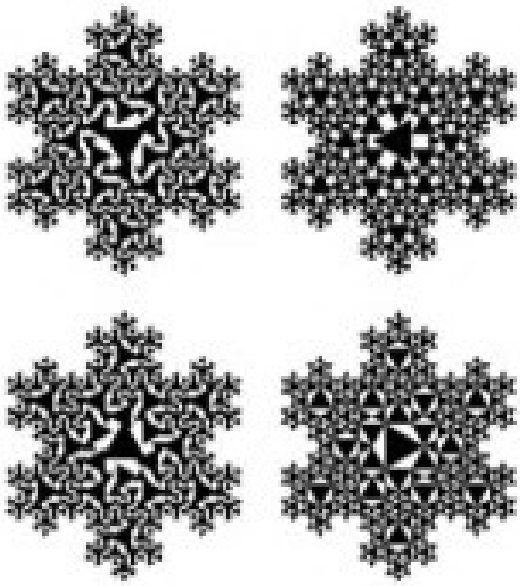
¡Exploremos la isla de Koch!

A) ¿Puedes calcular una ecuación de recurrencia para las sucesivas áreas en cada iteración? ¿Puedes calcular explícitamente el área de la n-ésima iteración y el área final?

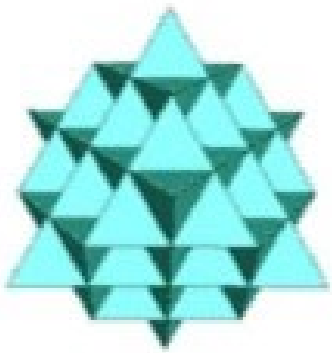


B) La isla de Koch posee su antiisla, como ves en la figura. ¿Puedes calcular de nuevo una ecuación de recurrencia para áreas y el área final?

C) Aquí algunas modificaciones sobre la isla de Koch.



D) ¿Y por qué no en 3D? Visita los fractales keplerianos de Paul Bourke



Iteraciones en la isla de Koch

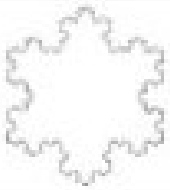
Supongamos que el área inicial es A_0 y que los lados miden 1.

- Número de "lados" en la iteración n-ésima: $N_n = 3*4^n$
- Longitud de los "lados" en la iteración n-ésima: $L_n = (1/3)^n$
- Perímetro total en la iteración n-ésima: $P_n = N_n * L_n = 3*(4/3)^n$. Luego el perímetro se hace infinito cuando n tiende a infinito.
- Área en la iteración n-ésima en función del área en la (n-1)-ésima:
  Explicitamente el área de la n-ésima iteración será: $\mathbf{A_n = [1+1/3S_{0-n}(4/9)^k].A_0}$
  Área final: Realizamos la suma anterior para n tendiendo a infinito y el resulrado es:
  $A_\infty = 8/5\ A_0$. ¡Área finita encerrada en un perímetro infinito!

Observemos que, si hemos tomado el lado del triángulo original como la unidad, entonces el área final será: 8/5 raiz (3)/4 = 2 raiz (3) / 5 = 0.6928... Y si hemos tomado el área original como 1, entonces el área final es: 8/5 * 1 = 1,6.

Isla de Koch

iteración	Isla de Koch	Lados	longitud lado
0		$3=3*4^0$	$L=1/3^0$
1		$12=3*4^1$	$L/3=1/3^1$
2		$48=3*4^2$	$L/9=1/3^2$

3		$192=3*4^3$	$L/27=1/3^3$
4		$768=3*4^4$	$L/81=1/3^4$
5		$3*4^n$	$L/3^n$

Supongamos que el área inicial es A_0 y que los lados miden 1.

- Número de "lados" en la iteración n-ésima: $N_n = 3*4^n$
- Longitud de los "lados" en la iteración n-ésima: $L_n = (1/3)^n$
- Perímetro total en la iteración n-ésima: $P_n = N_n * L_n = 3*(4/3)^n$. Luego el perímetro se hace infinito cuando n tiende a infinito.
- Área en la iteración n-ésima en función del área en la (n-1)-ésima:

Explícitamente el área de la n-ésima iteración será:

$$A_n = [1 + 1/3S_{k=1}(4/9)^k].A_0$$

- Área final : Realizamos la suma anterior para n tendiendo a ∞ y el resultado es:
- $A_n = 8/5\ A_0$. ¡Área finita encerrada en un perímetro infinito!

Observemos que, si hemos tomado el lado del triángulo original como la unidad, entonces el área final será: 8/5 raíz (3)/4 = 2 raíz (3) / 5 = 0.6928... Y si hemos tomado el área original como 1, entonces el área final es: 8/5 * 1 = 1,6.

Curva de Peano

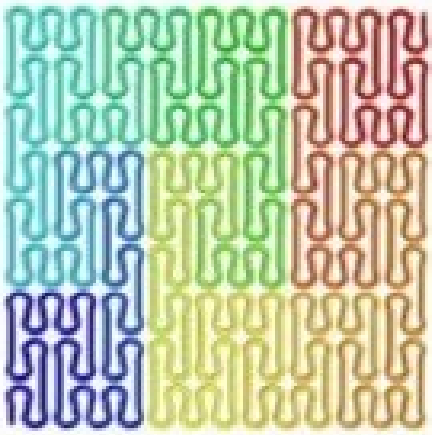
Una curva de Peano, nombre en honor al matemático italiano Giuseppe Peano, es un tipo de curva continua que "recubre" todo el plano (específicamente, la curva es un conjunto denso del plano). Este tipo de curvas se obtiene mediante una sucesión de curvas continuas sin intersecciones que convergen a una curva límite. La curva límite o curva de Peano, de hecho, es un objeto fractal interesante, ya que, aunque su dimensión topológica es 1, su dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch es 2.

Técnicamente la curva de Peano es el límite de una sucesión de curvas con las siguientes propiedades:

- Cada una de las curvas es continua y la sucesión converge uniformemente.
- Cada función es inyectiva y es homeomorfa a un intervalo.

Esas dos propiedades implican que la curva límite cumplirá las siguientes condiciones:

- Será una curva continua e inyectiva.
- La curva de Peano es equipotente a la región [0; 1] x [0; 1]; sin embargo, la dimensión de la curva peaniana es 1 y del cuadrado es 2.



Curvas senoidales

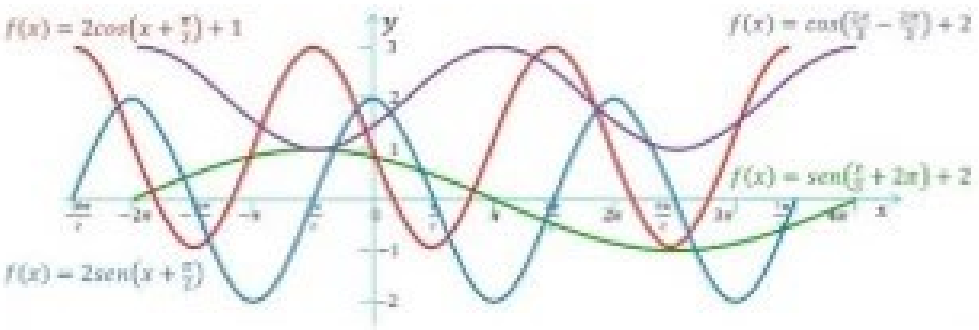
Función Senoidal (sinusoide)

En matemáticas, se llama sinusoide la curva que representa gráficamente la función seno y también a dicha función en sí. La sinusoide puede ser descrita por la siguiente expresión matemática siguiente: **f(x)= a sin (bx+c)+d**, que no es la única.

Período (T) en una sinusoide: Es el menor conjunto de valores de x que corresponden a un ciclo completo de valores de la función; en este sentido, toda función de una variable que repite sus valores en un ciclo completo es una función periódica, sea o no sinusoidal. En este ejercicio, determinar cómo varía el período de una sinusoide al variar el parámetro "b". En las gráficas de las funciones seno-coseno, secante-cosecante el período es 2p (360°), mientras que para la tangente y cotangente el período es p (180°).

Amplitud (a) en una sinusoide: Es el máximo alejamiento en valor absoluto de la curva medida desde el eje x.

Fase inicial (c) en una sinusoide: La fase da una idea del desplazamiento horizontal de la sinusoide. Si dos sinusoides tienen la misma frecuencia e igual fase, se dice que están en fase. Si dos sinusoides tienen la misma frecuencia y distinta fase, se dice que están en desfase, y una de las sinusoides está adelantada o atrasada con respecto de la otra.



Fuente: https://matematicarpc.com/12dj/blog/graficas-de-funciones-sinusoidal

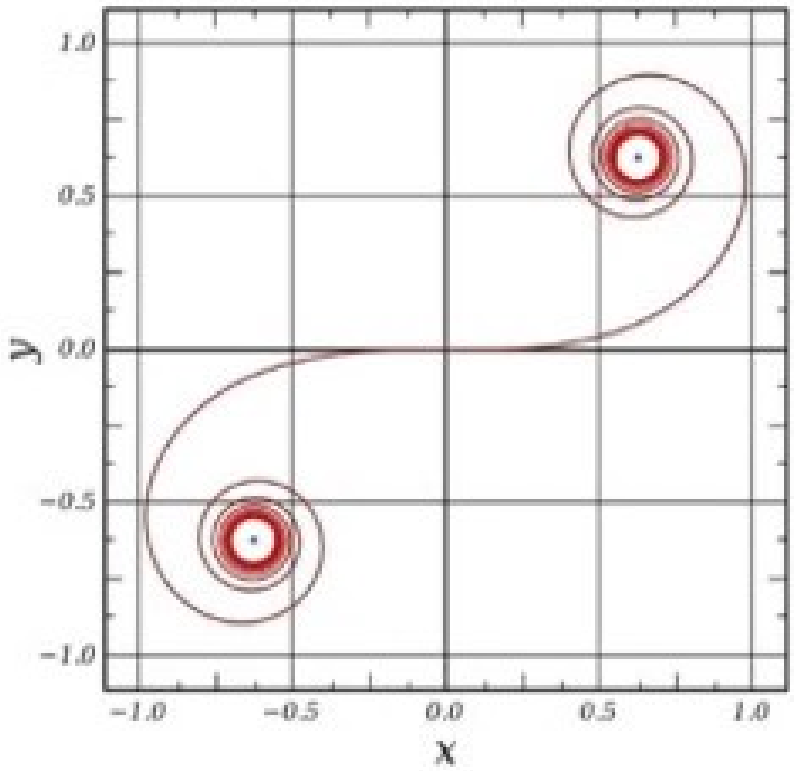
Clotoide, la curva que vela por tu seguridad en carreteras y ferrocarriles

Los primeros trazados de carreteras y vías férreas encadenaban tramos rectos con arcos de circunferencia. Pero, cuando coches y trenes alcanzaron velocidades más altas, se producía una incómoda y peligrosa sacudida al entrar en la curva. Los ingenieros comenzaron a buscar una solución, y la encontraron en las matemáticas y la física. ¿Quieren una explicación sencilla de por qué se usa la clotoide como curva de transición?

Imaginen que tienen que diseñar una autovía o una vía férrea de alta velocidad. Seguro que intentarán que haya todas las rectas posibles, pero también tendrás que hacer alguna curva. Y como la más sencilla de todas es la circunferencia, lo más fácil sería ir empalmando tramos rectos con arcos de circunferencia.

El radio de curvatura r y la distancia d recorrida deben ser inversamente proporcionales. O sea que su producto fuera siempre el mismo número.

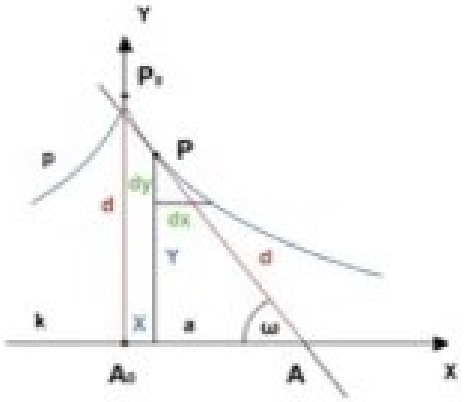
Justo esta propiedad es la que define a la curva clotoide, que ya conocían matemáticos y físicos. Su ecuación es precisamente $d \cdot r = C^2$ (donde C es una constante, que se pone al cuadrado para facilitar las cuentas al dibujar).



Fuente: http://cifrasytrazas.com/clotoide-la-curva-que-vela-por-tu-seguridad-en-Carreteras-y-ferrocarriles/

Por eso en tus carreteras y ferrocarriles las curvas suelen encadenar tramos de recta –clotoide – circunferencia – clotoide – recta. De ese modo la fuerza centrífuga va cambiando gradualmente y puedes girar el volante de forma progresiva, en vez de tener que hacerlo bruscamente.

Tractriz o curva del perro

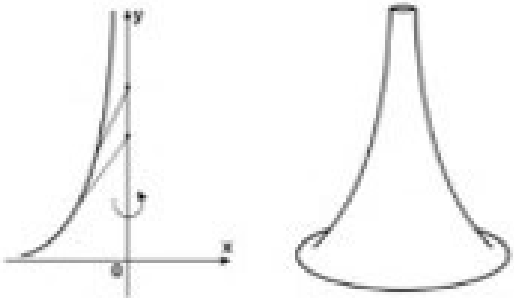


Tractriz o curva del perro es la curva que describe un objeto (situado en P_0) que es arrastrado por otro (situado en A_0), que se mantiene a distancia constante d y que se desplaza en línea recta. El nombre de tractriz viene del latín *tractus* que significa tirar, jalar, arrastrar. Su evoluta es la catenaria.

La tractriz es conocida también como curva equitangencial, esta denominación se debe a la propiedad de que cualquier segmento tangente a ella desde el punto de tangencia hasta la asíntota de la curva tiene longitud constante.

Historia

Hüygens estudia la curva en 1690. Fue el primero en usar el término catenaria en una carta a Leibniz, y después fue estudiada por Leibniz, Johann Bernoulli, Joseph Liouville y Eugenio Beltrami. Este último encontró una aplicación insospechada de ella en la seudoesfera.



Si hacemos girar una tractriz alrededor de su asíntota, obtenemos una superficie de revolución que tiene curvatura negativa (se curva hacia adentro) en todos sus puntos. Es la seudoesfera.

Ecuaciones

La ecuación cartesiana de la tractriz es:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cosh(t)} \\ y = t - \tanh(t) \end{cases}$$

La ecuación genérica de la tractriz en ecuaciones paramétricas es:

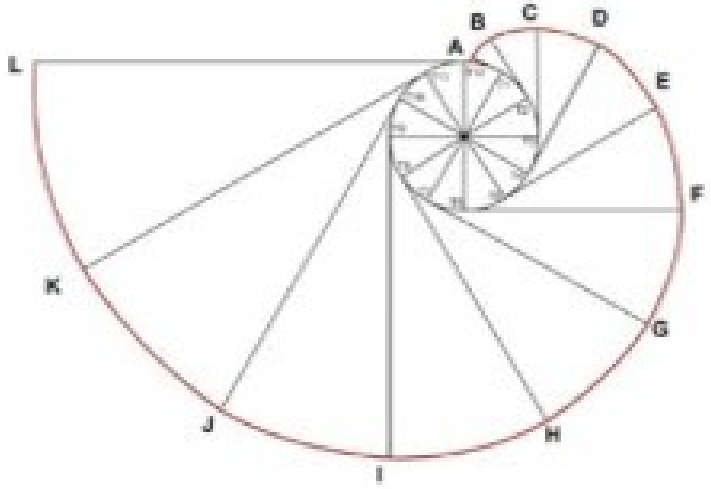
$$x = a \ln(\cot\varphi/2 - \cos\varphi)$$
$$y = a \operatorname{sen}\varphi$$

Propiedades de la tractriz

- El eje x es una asíntota de la curva.
- En la tractriz cualquier segmento tangente del punto de tangencia a la asíntota es de longitud constante.
- La envoltura de las normales de la tractriz, es decir, la evoluta de la tractriz es la catenaria.

Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Tractriz

Evolvente de una circunferencia



Construimos una circunferencia y la dividimos en partes iguales, 12, por ejemplo. En cada uno de los puntos donde los diámetros cortan a la circunferencia T1, T2, T3, T4, etc., hacemos rectas tangentes a la circunferencia: T1-A, T2-B, T3-C, etc.

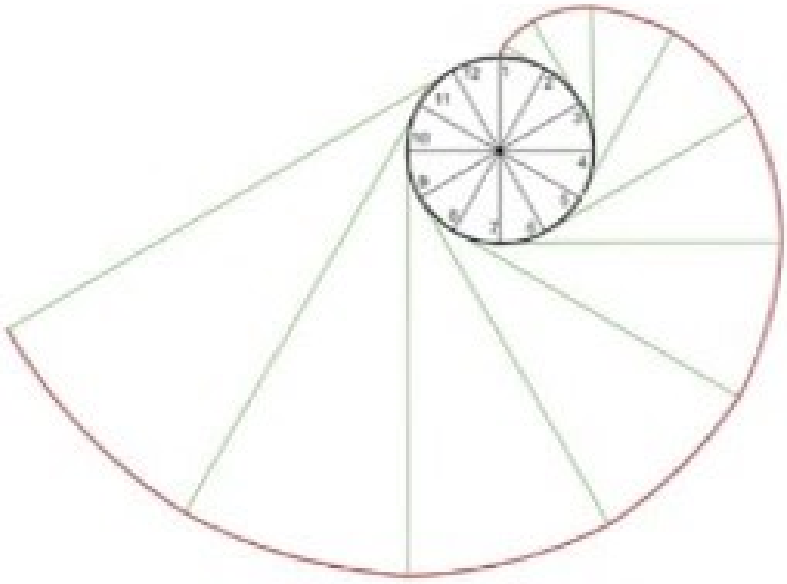
Con centro en T1 y radio T1-T12, hacemos un arco hasta T1-A, punto de corte con la 1ª recta tangente A.

Con centro en T2 y radio hasta donde concluye el primer arco anterior, hacemos el segundo arco hasta B.

Con centro en T3 y radio hasta donde concluye el 2º arco anterior, hacemos el 3º arco hasta C y así, sucesivamente.

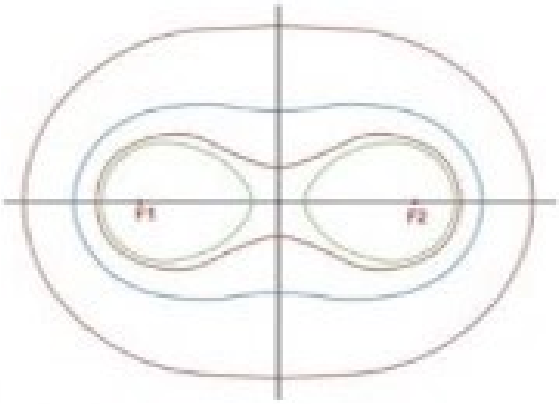
La evolvente es el dibujo que hace un punto del extremo de un cordel que se desenrolla de una circunferencia. Un ejemplo de esta curva lo tenemos en el flanco de una rueda dentada.

La evoluta de la evolvente del círculo, esto es, el lugar geométrico de los centros de curvatura de la evolvente, es la circunferencia en la que se hace centro para realizar los arcos de la espiral.



El lugar geométrico de los centros de curvatura de cualquier curva es una evoluta. Por tanto, la evoluta de esta espiral evolvente de la circunferencia es una circunferencia. Fuente: http://curvas-planas.blogspot.com.ar/2010/10/blog-post_13.html

Óvalos de Cassini



Es el lugar geométrico de un punto donde el producto de las distancias a dos puntos fijos F1, F2 es la constante (b^2).

Historia

Esta curva llamada también Cassinian o Elipse Cassinian fue concebida por Giovanni Domenico Cassini. Estudió esta familia de curvas en relación con los movimientos relativos del Sol y la Tierra en 1680. El creía que estas curvas podían representar órbitas planetarias.

Cassini concibió estas curvas catorce años antes de que Jakob Bernoulli describiera su *Lemniscata*. Gian Francesco Malfatti estudió estas curvas en 1781.

Ecuaciones

La ecuación cartesiana de los óvalos de Cassini es:

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)+a^4=b^4$$

La ecuación polar de los óvalos de Cassini es:

$$r^4 + a^4 - 2r^2a^2 \cos 2\theta = b^4$$

F1 = (−a, 0) F2 = (a, 0)

La relación entre los valores **a** y **b** determina el tipo de curva que se obtendrá.

- Si **b > a**, la curva será un óvalo que no se corta a sí mismo.
- Si **b = a**, aparecerá la Lemniscata de Bernoulli.
- Si **b < a**, representará dos óvalos separados.

Propiedades

Si **b=a** es el radio interior de un toro cuyo círculo generador tiene radio a, la sección formada por un plano paralelo al eje del toro y que dista a unidades de él es un óvalo de Cassini.

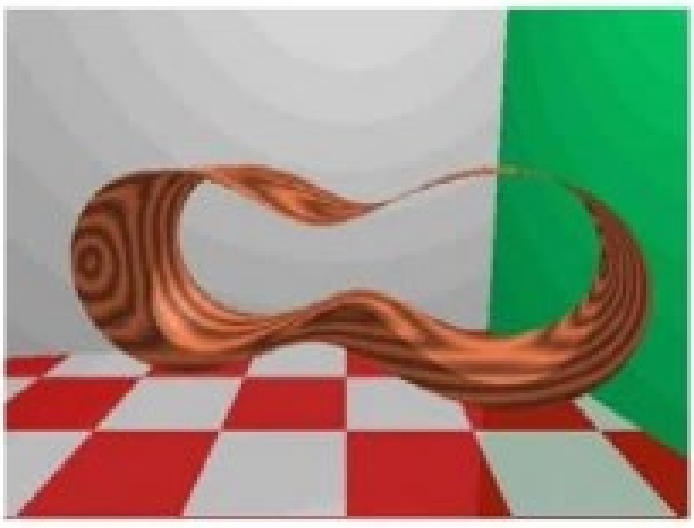
Si **b = 2a**, este plano es una tangente interior a la superficie y la sección es una Lemniscata. Cortes arbitrarios del toro no son óvalos de Cassini. La intersección de un toro y un plano paralelo al eje del toro se llama sección spiric.

Construcción

Para construir los óvalos de Cassini, se deben realizar los pasos siguientes:

- Dibujar una circunferencia cuyo diámetro sea la distancia focal.
- Una vez fijado el eje mayor AB, señalar un punto P en la circunferencia.
- Trazar desde el vértice A la semirrecta que pasa por P y que cortará a la circunferencia en el punto Q.
- Con centros en el foco F y en F', dibujar dos circunferencias de radios AQ y AP, respectivamente.
- Los puntos de intersección M y N de estas dos circunferencias serán puntos de la curva.

Aplicamos movimiento al punto P para obtener la representación de la curva (Lugar geométrico representado por los puntos M y N cuando el punto P recorre la circunferencia). Podremos desplazar un foco sobre el eje para obtener los distintos tipos de óvalos.



Concoide de Nicomedes

Nicomedes nació en el año 280 a.C. aproximadamente, en Grecia. Murió sobre el año 210 a.C. Se sabe muy poco de su vida, incluso para establecer el periodo en el que vivió hay que hacerlo con referencias indirectas. Se sabe que Nicomedes criticó la duplicación del cubo de Eratóstenes (276 a. C.-194 a. C.) y que Apolonio (262 a.C.-190 a.C.) también habló de Nicomedes.

Es famoso por su tratado *Las líneas de la concoide* y quiso utilizar la concoide para solucionar los problemas clásicos de la trisección del ángulo y la duplicación del cubo.

Definición

Es el lugar geométrico de los puntos ***Q1*** y ***Q2*** cuando ***P*** recorre la recta ***r*** es la concoide de ***r*** con respecto al polo ***O*** y constante ***k***.

Trazado de la concoide de Nicomedes

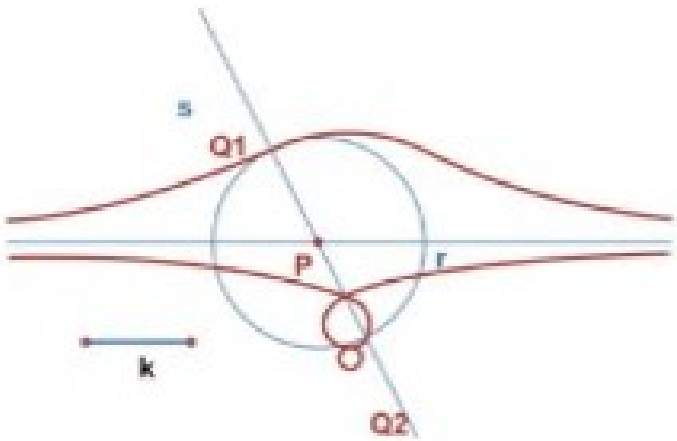
Para dibujar la concoide de Nicomedes necesitamos los siguientes elementos:

1. Dibujamos una recta ***r*** (la ***directriz***).
2. Un punto exterior a la recta ***O*** (origen o polo).
3. Un segmento con una longitud determinada ***k*** (constante).

Y procedemos de la siguiente manera:

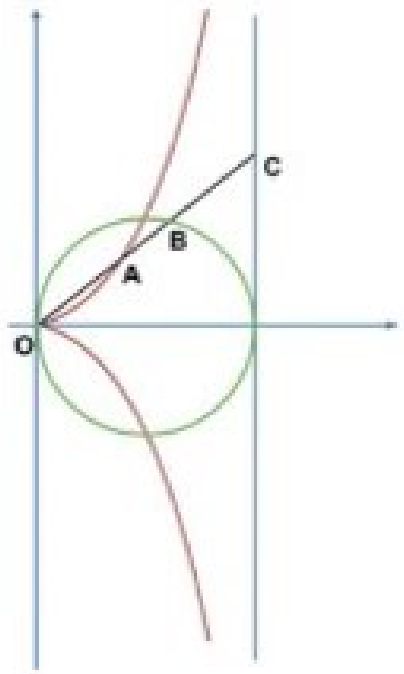
1. Desde ***O*** se traza una recta cualquiera ***s*** que corta a ***r*** (la directriz) en el punto ***P***.
2. Con centro en ***P*** y radio ***k*** se traza una circunferencia que corta a la recta s en los puntos ***Q1*** y ***Q2***, es decir ***Q1*** y ***Q2*** verifican ***d(Q1,P)=k***; ***d(Q2,P)=k***.

Su fórmula implícita es la siguiente, donde la ***directriz*** es ***y=b*** y la constante (radio de la circunferencia es ***r=k***):



$$(y-b)^2(x^2+y^2)=k^2y^2$$

Cisoide de Diocles



La cisoide de Diocles es la curva generada por el vector posición de una recta paralela al eje OY (Curva 1), que pasa por el punto (2a, 0), al que se le resta el radio vector de una circunferencia de radio a y centro en (0, a) (Curva 2).

Su ecuación, en coordenadas polares, es:

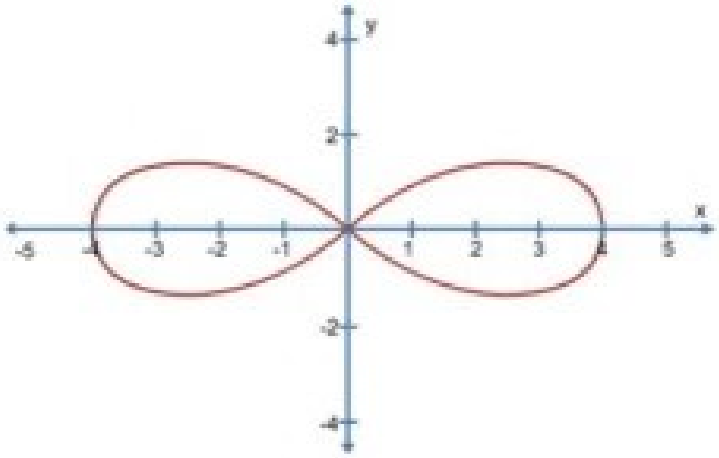
$$\rho = \rho_1 - \rho_2 = \frac{2a}{\cos \omega} - 2a \cos \omega = 2a \frac{sen^2 \omega}{\cos \omega}$$

Y en cartesianas:

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

Propiedades

- La curva tiene un eje de simetría, el eje OX. Tiene un punto de retroceso, el origen de coordenadas.
- Considerando como una relación el valor de x recorre el intervalo [0,2a>; el valor recorre el intervalo abierto < -∞, +∞>.
- Su asíntota es la recta x = 2a.
- El área entre la curva y la asíntota es $A = 3pa^2$
- Si se considera la asíntota x= 4, el volumen del sólido generado por rotación de la cisoide, teniendo como eje tal asintota, es V = 16p.
- Fue empleada por el griego Diocles en el esfuerzo de dar solución al problema clásico de la duplicación del cubo, en el siglo II a.C.



En matemática, una lemniscata es un tipo de curva descrita por la siguiente ecuación en coordenadas cartesianas:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

Historia

La Lemniscata se considera actualmente como un caso particular de los óvalos estudiados por Jean Dominique Cassini en 1680, pero son Jackob Bernoulli y Johann Bernoulli los que la descubrieron y dieron a conocer independientemente, al intentar resolver un problema planteado por Leibnitz, creador junto con Isaac Newton del cálculo infinitesimal, que lanzó a la comunidad científica de la época el reto de encontrar la ecuación de la isócrona paracéntrica. La solución encontrada fue la lemniscata que en honor a los hermanos Bernoulli pasó a denominarse lemniscata de Bernoulli.

Bernoulli la llamó *lemniscus*, que en latín significa "cinta colgante".

La representación gráfica de esta ecuación genera una curva similar a ∞. La curva se ha convertido en el simbolo del infinito y es ampliamente utilizada en matemática.

Definición

Es la curva que se define como el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de las distancias desde dos puntos focales es una constante.

Ecuaciones

- Ecuación en coordenadas cartesianas:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

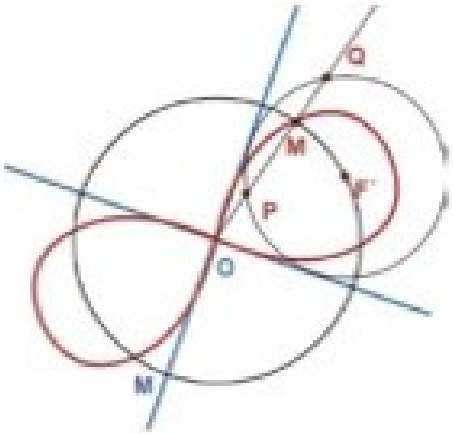
- La lemniscata puede ser descrita mediante coordenadas polares según la siguiente ecuación:

$$r^2 = a^2\cos 2\theta$$

- Análogamente, con coordenadas bipolares su ecuación es:

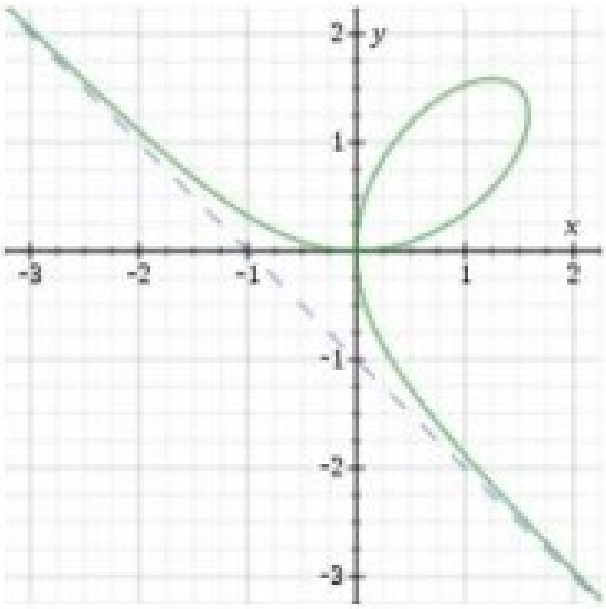
$$rr' = a^2/2$$

Construcción de la Lemniscata de Bernoulli



- Se construye una circunferencia de centro F', tangente a dos rectas perpendiculares que se cortan en el punto O.
- Sea P un punto cualquiera de la circunferencia y Q el punto de intersección entre la semirrecta OP y la circunferencia.
- Se traza la circunferencia de centro O y radio PQ.
- Sea M el punto de intersección de la semirrecta y la circunferencia de centro O.
- El lugar geométrico descrito por el punto M y el simétrico de M respecto a O (M'), a medida que P se mueve en la circunferencia de centro F', es una Lemniscata de Bernoulli.

Lemniscata Sagrada



El Folium de Descartes ('hoja de Descartes') es una curva algebraica propuesta por vez primera por Descartes en 1638 con la ecuación implícita:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

Que también puede ser descrita explícitamente en coordenadas polares como:

$$r(\theta) = \frac{3a \sin\theta \cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}$$

Características de la curva

Ecuación de la tangente

Usando el método de diferenciación implícita, la ecuación anterior puede resolverse para y': recta tangente.

Asíntota

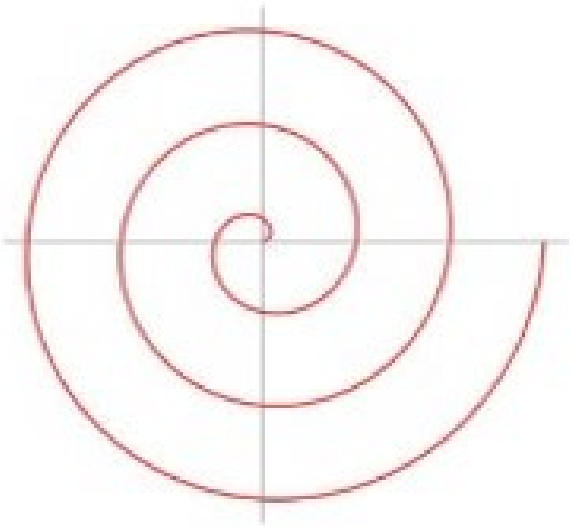
La curva tiene una asíntota:

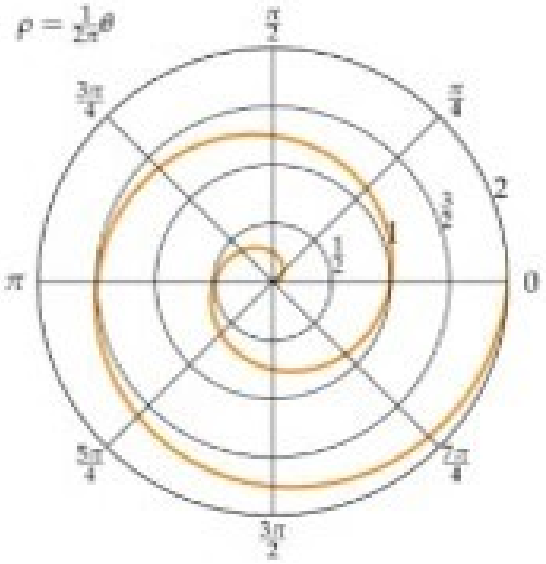
$$\mathbf{x + y + a = 0}$$

La asíntota tiene un gradiente (pendiente) de **-1** y una intersección en x y en y de $-a$.

ArquiMática

Espiral de Arquímedes





La espiral de Arquímedes (también espiral aritmética) obtuvo su nombre de Arquímedes, quien vivió en el siglo III antes de Cristo. El matemático griego describió esta espiral en su libro *De las Espirales*. La define como el lugar geométrico de un punto moviéndose a velocidad constante sobre una recta que gira sobre un punto de origen fijo a velocidad angular constante.

Como cualquier otra espiral, esta está formada por varios empalmes de arcos.

En coordenadas polares (r, θ) la espiral de Arquímedes puede ser descrita por la ecuación siguiente:

$$r = a + b\theta$$

Siendo *a* y *b* números reales. Cuando el parámetro ***a*** cambia, la espiral gira, mientras que ***b*** controla la distancia en giros sucesivos.

La espiral de Arquímedes se puede trazar dentro de una circunferencia y conforme va creciendo se va alejando un arco de otro.

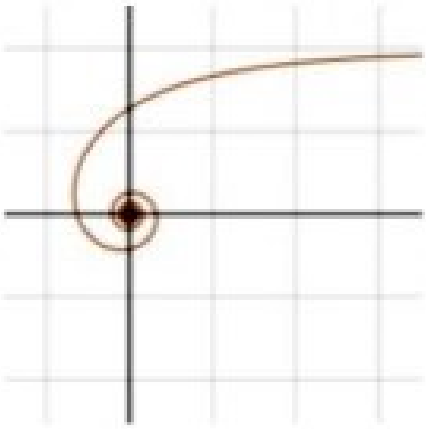
Esta curva se distingue de la espiral logarítmica por el hecho de que, vueltas sucesivas de la misma tienen distancias de separación constantes (iguales a $2\pi b$ si θ es medido en radianes), mientras que en una espiral logarítmica la separación está dada por una progresión geométrica.

Hay que notar que la espiral de Arquímedes tiene dos brazos, uno para $\theta > 0$ y otro para $\theta < 0$.

Los dos brazos están discretamente conectados en el origen y sólo se muestra uno de ellos en la gráfica. Tomando la imagen reflejada en el ***eje Y*** produciremos el otro brazo.

Espiral hiperbólica

Una espiral hiperbólica es una curva plana trascendental, también conocida como espiral recíproca. Se define por la ecuación polar $r\theta = a$, y es la inversa de la espiral de Arquímedes.



Espiral hiperbólica para a=2.

Comienza en una distancia infinita del polo central (para θ, comenzando desde cero, r = a/θ comienza desde el infinito), y se enrolla cada vez más rápidamente mientras se aproxima al polo central, la distancia de cualquier punto al polo, siguiendo la curva, es infinita.

Aplicando la transformación desde el sistema de coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

conduce a la siguiente representación paramétrica en coordenadas cartesianas:

$$x = a\frac{\cos t}{t}, \qquad y = a\frac{\sin t}{t},$$

donde el parámetro t es un equivalente de θ en las coordenadas polares.

La espiral tiene una asíntota en $y = a$: cuando t se aproxima a cero, la ordenada se aproxima hacia a, mientras que la abscisa crece hasta el infinito:

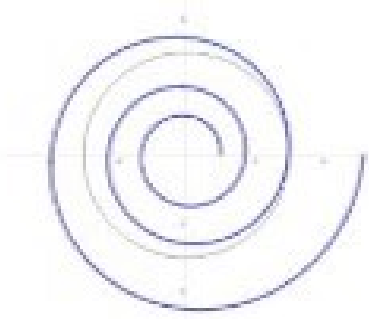
$$\lim_{t\to 0} x = a\lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{t} = \infty,$$

$$\lim_{t\to 0} y = a\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = a\cdot 1 = a.$$

Espiral logarítmica

Una espiral logarítmica, espiral equiangular o espiral de crecimiento, es una clase de curva espiral que aparece frecuentemente en la naturaleza. Su nombre proviene de la expresión de una de sus ecuaciones:

$$\theta = \log_b(r/a)$$



Espiral logarítmica (grado 5°)

El término espiral logarítmica se debe a Pierre Varignon. La espiral logarítmica fue estudiada por *Descartes y Torricelli*, pero la persona que le dedicó un libro fue *Jakob Bernoulli*, que la llamó Spira mirabilis, "la espiral maravillosa".

En coordenadas polares (r, θ) la fórmula de la curva puede escribirse como

$$r = ab^{\theta}$$

De aquí el nombre "logarítmica" y en forma paramétrica como logarítmica.

$$x(\theta) = a.b^{\theta}.cos(\theta)$$
$$y(\theta) = a.b^{\theta}.sen(\theta)$$

En la figura, corte de la concha de un nautilus donde se aprecian las cámaras formando aproximadamente una espiral logarítmica.

Sobre espirales en general:

- A veces, el término es usado para un grupo más general de espirales.

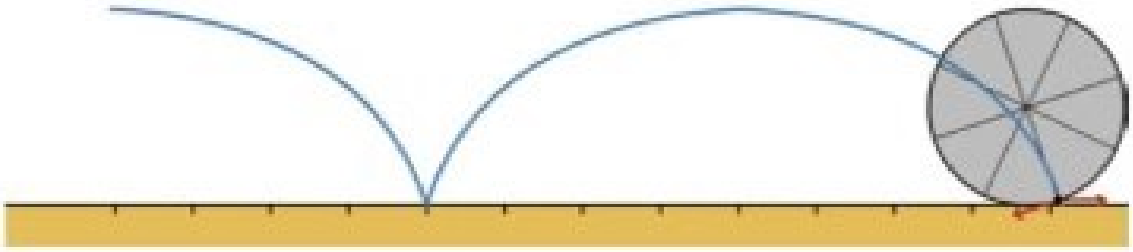
$$r = a + b\theta^{\sqrt[x]{}}.$$

- La espiral normal ocurre cuando x = 1.
- Otras espirales que caen dentro del grupo incluyen la espiral hiperbólica, la espiral de Fermat y el Lituus.
- Virtualmente todas las espirales estáticas que aparecen en la naturaleza son espirales logarítmicas, no de Arquímedes.
- Muchas espirales dinámicas (como la espiral de Parker del viento solar, o el patrón producido por una rueda de Catherine) son del grupo de Arquímedes.

Cicloide

La cicloide se produce cuando se hace rodar un disco sobre una superficie horizontal.

Un punto del borde del disco describe una curva que se denomina "cicloide" (palabra griega que significa circular). A un giro del disco le corresponde un arco de la cicloide.



Una cicloide es una curva generada por un punto perteneciente a una circunferencia generatriz al rodar sobre una línea recta directriz, sin deslizarse.

Historia

La cicloide fue estudiada por primera vez por Nicolás de Cusa y, posteriormente, por Mersenne (monje, amigo de toda la vida de Descartes).

Galileo en el año 1599 estudió la curva y fue el primero en darle el nombre con el que la conocemos.

A causa de las continuas disputas entre los matemáticos del siglo XVII la cicloide ha sido denominada "La Elena de los Geómetras", y existen opiniones que mencionan esta denominación poética de las bellas propiedades de esta curva.

Ecuaciones

Ecuación paramétrica

Si la cicloide se genera mediante una circunferencia de radio a que se apoya sobre el eje de abscisas en el origen, su descripción en forma paramétrica viene dada por:

$$\begin{cases} x = a\,(t - \sin t) \\ y = a\,(1 - \cos t) \end{cases}$$

donde t es un parámetro real. Siendo la variable y función de la variable x, esta cicloide tiene un período de $2a\pi$, y una altura de $2a$.

Ecuación cartesiana

Si se despeja la variable t en la ecuación paramétrica, se obtendrá la forma cartesiana:

$$x = a \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}\ ,$$

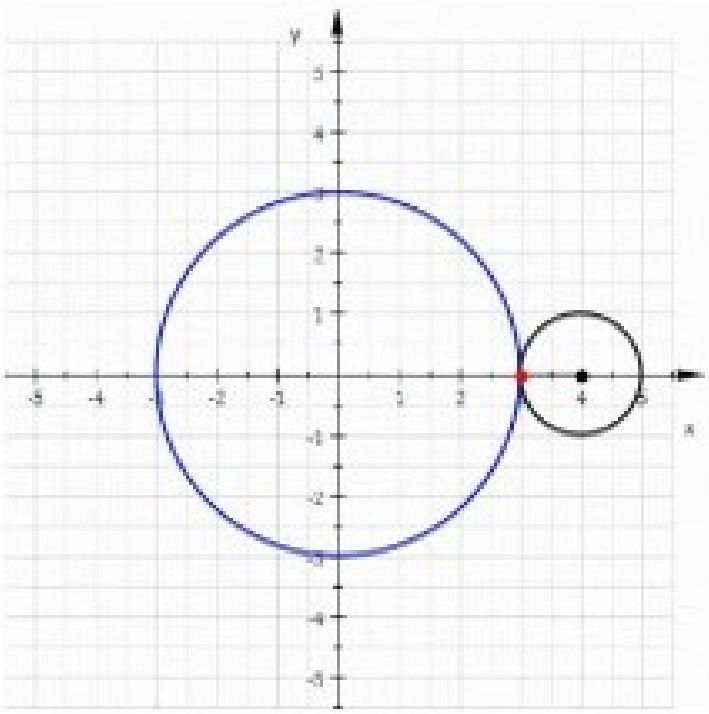
donde el único parámetro de forma es el radio a de la circunferencia generatriz. Esta fórmula es válida para la variable y en el intervalo $[0,2a]$, y proporciona sólo la mitad del primer bucle de la cicloide.

La ecuación en forma intrínseca es:

$$\rho^2 + s^2 = 16a^2$$

Donde igualmente ρ representa el radio de la curva es la abscisa curvilínea.

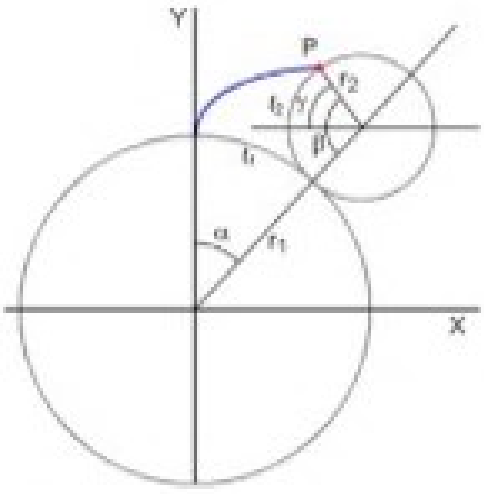
Epicicloide



La curva es una epicicloide trazada a medida que el pequeño círculo (radio $r = 1$) gira sobre la circunferencia de un círculo mayor (radio $R = 3$).

La epicicloide es la curva generada por la trayectoria de un punto de una circunferencia que rueda, sin deslizamiento, por el exterior de otra circunferencia directriz. Es un tipo de ruleta cicloidal.

Ecuación



Considerando la figura podemos escribir:

$$x = (r_1 + r_2)sen\ \alpha\ - r_2\ cos\gamma$$
$$y = (r_1 + r_2)cos\ \alpha\ + r_2\ sen\gamma$$
$$\gamma = \alpha + \beta - \pi/2$$
$$\beta = \frac{r_1}{r_2}\alpha$$

Además, como la circunferencia rueda sin deslizamiento, los arcos l_1 y l_2 son iguales,

$$r_1\ \alpha = l_1 = l_2 = r_2\ \beta$$

De aquí se tiene que:

Sustituyendo β y γ en las ecuaciones [1] y [2] tenemos la ecuación paramétrica de la epicicloide:

$$x = (r_1 + r_2)sen\ \alpha\ - r_2\ sen\ [\alpha(1 + \frac{r_1}{r_2})]$$
$$y = (r_1 + r_2)cos\ \alpha\ - r_2\ cos\ [\alpha(1 + \frac{r_1}{r_2})]$$

Casos particulares

Si
$$k = \frac{r_1}{r_2} = \frac{p}{q}$$

Siendo *p* y *q* números enteros, las epicicloides son curvas algebraicas.

Cuando r_1=r_2,

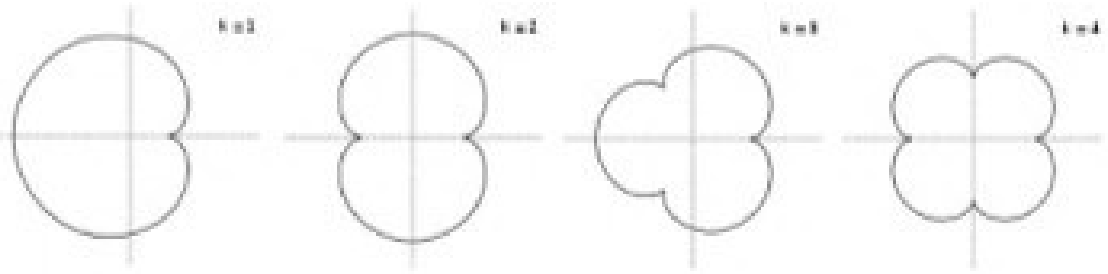
***k* = 1** Obtenemos una cardioide.

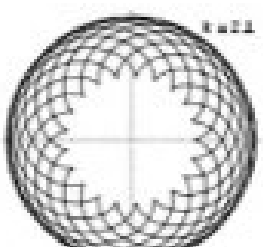
Cuando r_1=2r_2,

***k* = 2** Obtenemos una nefroide.

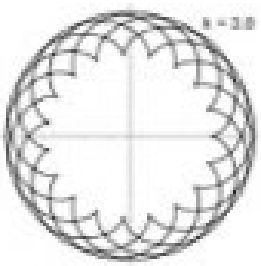
Ejemplos:

- ejemplos de epicicloides



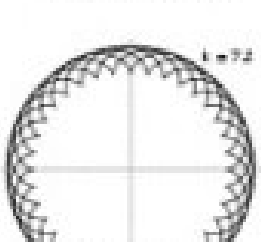


k=2,1=21/10



k=3,8=38/10

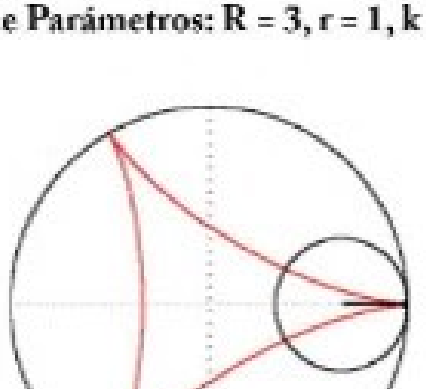
k=5,5=11/2

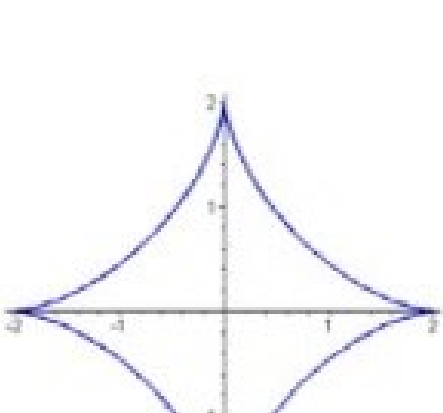


k=7,2=36/5

Hipocicloide

Hipocicloide Parámetros: R = 3, r = 1, k = 3.





La curva es una hipocicloide dibujada al girar la circunferencia pequeña por el interior de la circunferencia grande, obteniendo en este caso una deltoide.

Una curva hipocicloide es la trayectoria descrita por un punto situado sobre una circunferencia generatriz menor, que rueda sin deslizar por el interior de otra circunferencia directriz mayor, sin deslizamiento.

Es un tipo de ruleta cicloidal.

La curva hipocicloide es comparable a la cicloide, donde la circunferencia generatriz rueda sobre una línea directriz (o circunferencia de radio infinito).

Ecuación paramétrica

La ecuación paramétrica de una curva hipocicloide generada por un punto de una circunferencia de radio r_2 que rueda dentro de una circunferencia de radio r_1, es:

$$x = (r_1 - r_2)\sin\alpha \ - r_2 \ \cos\gamma$$

$$y = (r_1 - r_2)\cos\alpha \ - r_2 \ \sin\gamma$$

Casos particulares

1.- Si

$$k = \frac{r_1}{r_2} = \frac{p}{q}$$

Siendo p y q números enteros, las hipocicloides son curvas algebraicas.
Cuando $r_1 = 4\, r_2$ se tiene la astroide $(x^{2/3}+y^{2/3}=R^{2/3})$

2.- Si

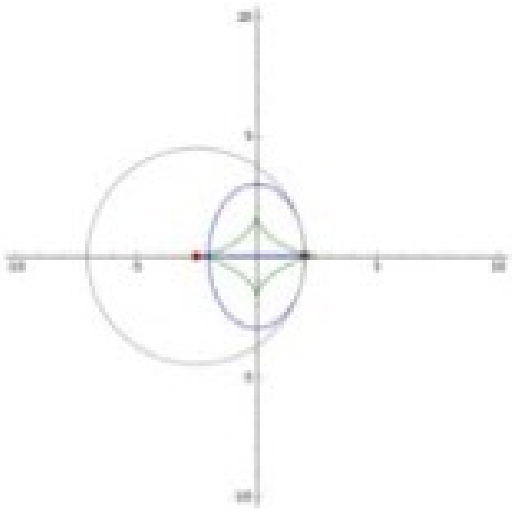
$$k = \frac{r_1}{r_2} = \frac{p}{q},$$

es irracional, la curva es trascendente y da infinitas vueltas dentro de la circunferencia directriz.

- Las curvas hipocicloides son una clase especial de hipotrocoides, las cuales a su vez son una clase particular de ruleta.
- La hipocicloide de tres puntas se denomina curva deltoide.
- La hipocicloide de cuatro puntas se llama astroide.

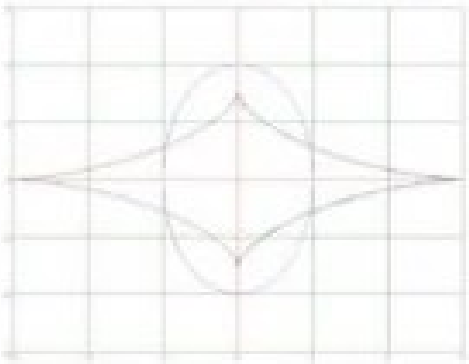
Evoluta de la elipse

Se llama evoluta de una curva "C" dada al lugar geométrico de los centros de curvatura de "C".



Una elipse y su evoluta. El círculo que se mueve es el círculo osculador a la elipse, cuyo centro es el centro de curvatura. También se puede observar que la recta tangente a la evoluta es normal a la elipse, es decir, la evoluta es la envolvente de las normales a la elipse. La evoluta de una elipse se llama astroide.

Ejemplos de evolutas



Evoluta de la elipse con a=1 y b=2.

Evoluta de la elipse (astroide)

Dada la elipse:

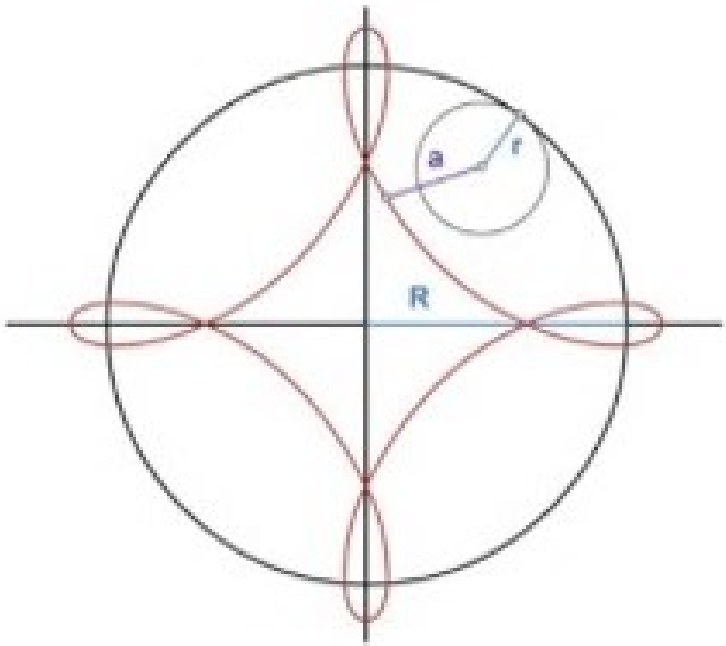
$$\left.\begin{aligned} x &= a\ \cos\ t \\ y &= b\ \text{sen}\ t \end{aligned}\right\}$$

Su evoluta viene dada por:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t \\ y &= \frac{b^2 - a^2}{b}\text{sen}^3 t \end{aligned}\right\}$$

Eliminando el parámetro, queda:

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$



La estrofoide de Newton es una hermosa curva algebraica plana de 3º grado, circular y con un nodo. Citada por Barrow, descrita por Torriccelli y definida por Personne de Roverbal hacia 1650, Montucci le puso el nombre de estrofoide = *correa enrollada* en 1837. Aunque la lagartija debería haber dejado su cola apuntando hacia arriba. Foto Made Saputra II.

Historia

El primero que estudió esta curva, en 1645, fue el científico francés Roberval, quien le dio el nombre de pteroide (pteron = ala).

El nombre estrofoide es debido a Montucci (1846) y viene del griego *strofos* que significa 'cordón, cuerda, lazo, correa'.

Definición

Dado el sistema cartesiano ortonormal OXY sea A un punto sobre el eje x. Trazando por A una recta cualquiera AD que corte a OY en D, se lleva sobre esta recta, a un lado y otro de D los segmentos DM = DN = OD. El lugar geométrico de los puntos M y N se llama estrofoide.

Curva estudiada por Roberval en 1.645, por Barrow en 1.670 y Jean Bernoulli.

Ecuación polar:

$$\rho = a\,\frac{cos2\theta}{cos\theta} = a\left(2cos\theta - \frac{1}{cos\theta}\right)$$

Girada a 45°

$$\rho = a\sqrt{8}\,\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$$

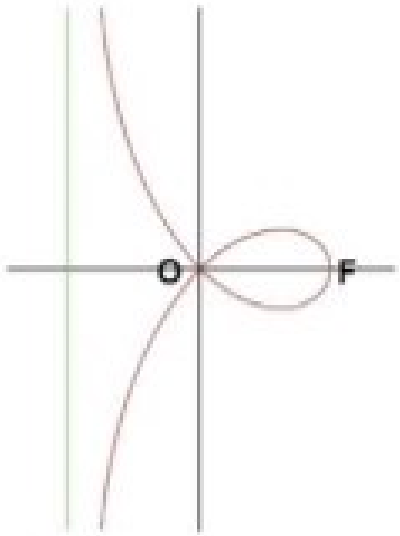
Ecuación Cartesiana

$$x\,(x^2 + y^2) = a\,(x^2 - y^2) \text{ ou } y = \pm x\sqrt{\frac{a - x}{a + x}}$$

Parametrización cartesiana

$$\begin{cases} x = a\sin t \\ y = a\tan t\,(1 - \sin t) \end{cases}$$

$$t = \frac{\pi}{2} - 2\theta$$



Dos puntos O y F estando dados, la strophoïde recta de vértice F y de *centro* O es el lugar de los puntos M de una recta variable (D) pasando por F tales que $PM = PF$ donde P es el punto de intersección de la recta (D) con la perpendicular (D_0) en O a (OF) (llamada eje de la strophoïde).

Vínculos entre funciones y ecuaciones

Igualdad matemática

En matemáticas, un enunciado en el que dos expresiones (iguales o distintas) denotan el mismo objeto matemático se llama igualdad matemática. Dos objetos matemáticos son considerados iguales si los objetos poseen el mismo valor. Por ejemplo, la frase «la suma de dos y dos» y la expresión «cuatro» se refieren al mismo objeto matemático, un cierto número natural. La expresión «es igual a» o «es lo mismo que» se suele representar en matemáticas con el signo =.

Origen de la notación: El primer uso del signo igualdad en la ecuación equivale a la notación moderna $14x+15=71$, tomado por Robert Recorde (1557).

Álgebra elemental y análisis

Dados tres objetos x, y, z, donde el uso de la palabra «objeto» comprende tanto a aquellos presentes en la experiencia sensible, como a los entes de razón. Para indicar que dos objetos x e y son iguales se utiliza el símbolo =.

Esto significa que, si dos objetos representados por diferentes letras son en realidad el mismo, se relacionan a través del signo igual.

Axiomas de igualdad de objetos

La igualdad se define como una relación que cumple los siguientes axiomas:

- reflexividad o principio de identidad: $x = x$,
- simetría: si $x = y$ entonces $y = x$,
- transitividad: si $x = y$ e $y = z$, entonces $x = z$.
- si dos símbolos son iguales, entonces uno puede ser sustituido por el otro.

Leyes de la igualdad

Dado un conjunto S, dotado de las operaciones de suma y multiplicación. Si a, b, c, d son cuatro elementos en S, entonces para la relación de igualdad (=) se cumplen las propiedades siguientes:

- si $a = b$ y $c = d$ entonces
  $a + c = b + d$,
  $ac = bd$,
- regularidad de la suma: trabajando con números reales o complejos sucede que si $a + c = b + c$, entonces $a = b$.
- regularidad condicional de la multiplicación: si $ac = bc$ y c no es el neutro de la suma en S, entonces $a = b$.

Tipos

Las igualdades pueden ser:

1. Condicionales o ecuaciones, en cuyo caso se cumplen para solo algunos valores de la variable, por ejemplo, si $3x = 6$, solo se cumple la igualdad si $x = 2$.
2. Identidades: se cumplen para todos los valores permisibles de la variable.

Las primeras se resuelven y las segundas se verifican.

Una relación de equivalencia entre los elementos de un conjunto determina sobre el conjunto dado una *partición* o una colección de clases de equivalencia.

La relación contraria es una relación de diferencia, notada con un igual tachado.

Problemas para resolver con ecuaciones

1. Se decomisan 24 litros de *leche* ($\gamma = 1{,}025 kg/dm^3$), que pesan 24,5Kg. a) Averiguar si está adulterada. b) En caso afirmativo determinar la composición de volúmenes de leche y agua.

2. A la hora cero las manecillas del reloj están superpuestas. ¿A qué hora vuelven a superponerse?

3. La válvula A desagota el tanque en 3 hs. La válvula B desagota el tanque en 4 horas. ¿En cuánto tiempo desagotarán el tanque si se abren simultáneamente?

4. "Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad."

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

x es la edad que vivió Diofanto

5. El día de ayer un amigo me dio su número telefónico que anoté en un papel y guardé en mi bolsillo. Al llegar a casa, metí la mano a la bolsa y saqué el papel que, con la lluvia, se había mojado. Los números se borraron. Yo recordaba que eran ocho números y la suma de cualesquiera tres números consecutivos era 14. De todos los números solo quedaban dos. El papel se veía así:

$$\_\ \_\ 7\ \_\ \_\ \_\ 5\ \_$$

¿Cómo saber cuál es el número telefónico de mi amigo?

Solución:

Supongamos que la primera cifra se llama a, la segunda b, la cuarta c, y así sucesivamente, de manera que las cifras se vean:

$$a\ b\ 7\ c\ d\ e\ 5\ f$$

Entonces, considerando los primeros tres números y después el segundo, tercero y cuarto, tenemos:

$$a + b + 7 = 14$$

$$b + 7 + c = 14$$

Igualando:

$$a + b + 7 = b + 7 + c$$

Observemos que en ambos lados de la igualdad aparecen b y 7. Cancelando obtenemos:

$a = c$, así la lista de números queda:

$$a\ b\ 7\ a\ d\ e\ 5\ f$$

Ahora, si observamos que 7, a y d son consecutivos y sumamos los tres primeros, tenemos:

$$7 + a + d = 14$$
$$a + b + 7 = 14$$

Igualando:

$$7 + a + d = a + b + 7$$

Cancelando a y 7 de ambos lados:

$$d = b$$

Entonces nuestra lista de números queda como sigue:

$$a\ b\ 7\ a\ b\ e\ 5\ f$$

Ahora, como:

$$\mathbf{a + b + e = 14}$$
$$\mathbf{a + b + 7 = 14}$$

Igualando:

$$a + b + e = a + b + 7$$

Cancelando a y b de ambos lados, tenemos que:

$$e = 7$$
$$\mathbf{a\ b\ 7\ a\ b\ 7\ 5\ f}$$

Sumando los últimos tres dígitos obtenemos:

$$7 + 5 + f = 14$$

Resolviendo la igualdad se tiene que: $f = 2$
La lista de números se ve ahora así:

a b 7 a b 7 5 2

Como:

$$b + 7 + 5 = 14$$

Resolviendo la ecuación encontramos el valor de b:

$$b = 2$$

Así los números quedan:

a 2 7 a 2 7 5 2

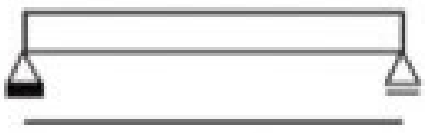
Solo resta encontrar el valor de a, para lo cual sumamos los primeros tres números y resolvemos la ecuación.

$$a + 2 + 7 = 14 \; ; a = 5$$

Y ahora sabemos que el número telefónico de mi amigo es:

$$52 - 75 - 27 - 52$$

6.- Se dispone de un IPN 14 (Wreal = 81,9 cm^3) para cubrir una luz L de = 4,80 m y soportar una carga de 540 Kg./m. Verificar el perfil o reforzar definiendo las medidas de la platabanda. Cálculo gráfico y analítico de la longitud de la platabanda.
Proponer platabandas de 4 cm. de ancho y espesores de 2 mm., 4 mm. y 6 mm.

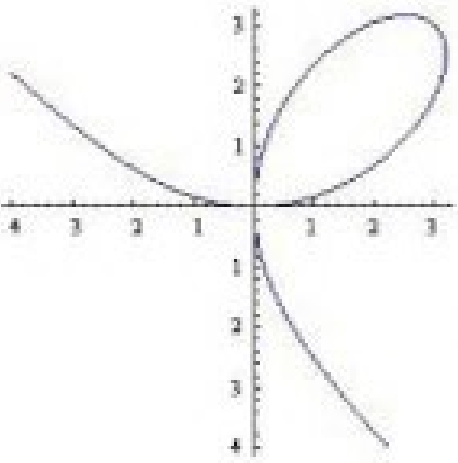


L

CAPÍTULO VIII

ANÁLISIS MATEMÁTICO

CAPÍTULO VIII
ANÁLISIS MATEMÁTICO



El desarrollo que produjeron pensadores como Arquímedes, Cauchy, Fermat, Barrow, Newton, Leibniz, L'Hopital, Galileo y tantos otros enseña que la matemática es una ciencia viva y que, cada vez más, brinda a la arquitectura herramientas más poderosas y sofisticadas.

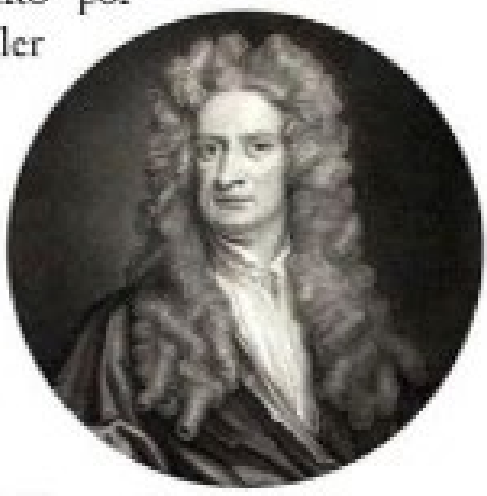
En resumen, este trabajo rescata y motiva el tesonero esfuerzo personal, bajo guía y tutela docente, como método irremplazable para alcanzar los conocimientos, habilidades y aptitudes necesarias a quien se inicia en el apasionante estudio de la arquitectura.

Faltaba el concepto de límite

Arquímedes fue el matemático más grande de su época. Sus métodos anticiparon el cálculo integral 2.000 años antes de Newton y Leibniz.

Aparecen en escena los "*creadores del análisis*": Newton y Leibniz.

Isaac Newton



La revolución científica iniciada en el Renacimiento por Copérnico y continuada en el siglo XVII por Galileo y Kepler tuvo su culminación en la obra del científico británico Isaac Newton (1642-1727), a quien no cabe juzgar sino como uno de los más grandes genios de la historia de la ciencia. Sin olvidar sus importantes aportes a las matemáticas, la astronomía y la óptica, lo más brillante de su contribución pertenece al campo de la física, hasta el punto de que *física clásica* y *física newtoniana* son hoy expresiones sinónimas.

Conocedor de los estudios sobre el movimiento de Galileo y de las leyes de Kepler sobre las órbitas de los planetas, Newton estableció las leyes fundamentales de la dinámica (ley de inercia, proporcionalidad de fuerza y aceleración y principio de acción y reacción) y dedujo de ellas la ley de gravitación universal.

Los hallazgos de Newton deslumbraron a la comunidad científica: la clarificación

y formulación matemática de la relación entre fuerza y movimiento permitía explicar y predecir tanto la trayectoria de una flecha como la órbita de Marte, unificando la mecánica terrestre y la celeste.

Con su magistral sistematización de las leyes del movimiento, Newton liquidó el aristotelismo, imperante durante casi dos mil años, y creó un nuevo paradigma (la física clásica) que se mantendría vigente hasta principios del siglo XX, cuando otro genio de su misma magnitud, Albert Einstein, formuló la teoría de la relatividad.

Newton fue un muchacho «sobrio, silencioso, meditativo», que prefirió construir utensilios para que las niñas jugaran con sus muñecas a compartir las diversiones de los demás muchachos, según el testimonio de una de sus compañeras femeninas infantiles, la cual, cuando ya era una anciana, se atribuyó una relación sentimental adolescente con Newton, la única que se le conoce con una mujer.

En Cambridge

Finalmente, en junio de 1661, Newton fue admitido en el Trinity College de Cambridge. Allí empezó a recibir una educación convencional en los principios de la filosofía aristotélica (por aquel entonces, los centros que destacaban en materia de estudios científicos se hallaban en Oxford y Londres), pero en 1663 se despertó su interés por las cuestiones relativas a la investigación experimental de la naturaleza, que estudió por su cuenta.

Fruto de esos esfuerzos independientes fueron sus primeras notas acerca de lo que luego sería su cálculo de fluxiones, estimuladas quizá por algunas de las clases del matemático y teólogo Isaac Barrow; sin embargo, Newton hubo de ser examinado por Barrow en 1664 al aspirar a una beca, y no consiguió entonces inspirarle ninguna opinión especialmente favorable.

Al declararse en Londres la gran epidemia de peste de 1665, Cambridge cerró sus puertas y Newton regresó a Woolsthorpe. En marzo de 1666 se reincorporó al Trinity, que de nuevo interrumpió sus actividades en junio al reaparecer la peste, y no reemprendió definitivamente sus estudios hasta abril de 1667.

En una carta publicada póstumamente, el propio Newton describió los años de 1665 y 1666 como su «época más fecunda de invención», durante la cual «pensaba en las matemáticas y en la filosofía mucho más que en ningún otro tiempo desde entonces».

El método de fluxiones, la teoría de los colores y las primeras ideas sobre la atracción gravitatoria, relacionadas con la permanencia de la Luna en su órbita en torno a la Tierra, fueron los logros que Newton mencionó como fechados en esos años, y él mismo se encargó de propagar, también hacia el final de su vida, la anécdota que relaciona sus primeros pensamientos sobre la ley de la gravedad con la observación casual de una manzana cayendo de alguno de los frutales de su jardín. Voltaire fue el encargado de divulgar en letra impresa la historia, que conocía por la sobrina de Newton.

Docencia e investigaciones matemáticas

A su regreso definitivo a Cambridge, Newton fue elegido miembro becario del Trinity College en octubre de 1667, y dos años más tarde sucedió a Barrow en su cátedra.

En 1664 o 1665 había hallado la famosa fórmula para el desarrollo de la potencia de un binomio (el binomio de Newton) con un exponente cualquiera, entero o fraccionario, cuyo teorema fue publicado por vez primera en 1685 por John Wallis, el más importante de los matemáticos ingleses inmediatamente anteriores a Newton, reconocido por este debidamente.

El procedimiento seguido por Newton para establecer la fórmula binomial tuvo la virtud de hacerle ver el interés de **las series infinitas para el cálculo infinitesimal**, legitimando así la intervención de los procesos infinitos en los razonamientos matemáticos y poniendo fin al rechazo tradicional de estos, impuesto por la matemática griega. La primera exposición sustancial de su método de **análisis matemático** por medio de series infinitas fue escrita por Newton en 1669.

Las controversias de la óptica

Tampoco en las aulas divulgó Newton sus resultados matemáticos, considerados más como una herramienta para el estudio de la naturaleza que un tema merecedor de atención en sí; el capítulo de la ciencia que eligió tratar en sus clases fue la óptica, a la que venía dedicando su atención desde que en 1666 tuviera la idea que hubo de llevarle a su descubrimiento de la naturaleza compuesta de la luz.

En 1672 presentó la construcción de un telescopio reflector. La comunicación de Newton aportaba la indiscutible evidencia experimental de que la luz blanca era una mezcla de rayos de diferentes colores.

Réplica del telescopio de Newton

El primero en oponerse a sus ideas en materia de óptica fue Robert Hooke, a quien la Royal Society encargó que informara acerca de la teoría presentada por Newton. Hooke defendía una concepción ondulatoria de la luz, frente a las ideas de Newton, precisadas en una nueva comunicación de 1675 que hacían de la luz un fenómeno resultante de la

emisión de corpúsculos luminosos por parte de determinados cuerpos. La acritud de la polémica determinó que Newton renunciara a publicar un tratado que contuviera los resultados de sus investigaciones hasta después de la muerte de Hooke y, en efecto, su *Óptica* no se publicó hasta 1704. La obra máxima de Newton, *Principios matemáticos de la filosofía natural*, vería la luz mucho antes.

En 1676 Newton renunció a proseguir la polémica acerca de su teoría de los colores y, por unos años, se refugió de nuevo en la intimidad de sus trabajos sobre el cálculo diferencial y en su interés por dos temas aparentemente alejados del mundo sobrio de sus investigaciones sobre la naturaleza: la alquimia y los estudios bíblicos.

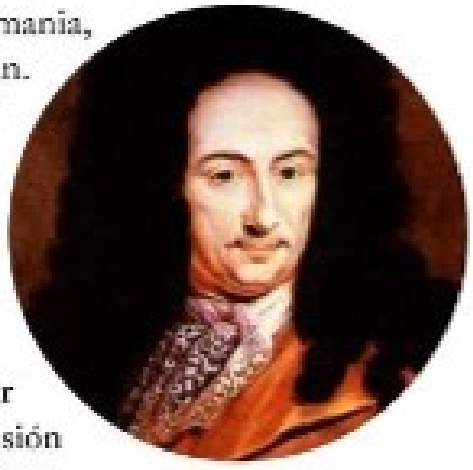
La afición de Newton por la alquimia (John Maynard Keynes lo llamó «el último de los magos») estaba en sintonía con su empeño por trascender el mecanicismo de observancia estrictamente cartesiana que todo lo reducía a materia y movimiento y llegar a establecer la presencia efectiva de lo espiritual en las operaciones de la naturaleza.

Cuando cinco años más tarde Edmond Halley, quien por entonces había ya observado el cometa que luego llevó su nombre, visitó a Newton en Cambridge y le preguntó cuál sería la órbita de un planeta si la gravedad disminuyese con el cuadrado de la distancia, su respuesta fue inmediata: una elipse. Maravillado por la rapidez con que Newton consideraba resuelto un asunto en cuyo esclarecimiento andaban compitiendo desde hacía varios meses Robert Hooke y el propio Halley, el astrónomo inquirió cómo podía conocer Newton la forma de la curva y obtuvo una contestación tajante: «La he calculado».

Los *Principios matemáticos de la filosofía natural* contenían la primera exposición impresa del cálculo infinitesimal creado por Newton, aunque el autor prefirió que la obra presentara los fundamentos de la física y la astronomía formulados en el lenguaje sintético de la geometría. Newton no fue el primero en servirse de aquel tipo de cálculo; de hecho, la primera edición de su obra contenía el reconocimiento de que Leibniz estaba en posesión de un método análogo. Sin embargo, la disputa de prioridades en que se enzarzaron los partidarios de uno y otro determinó que Newton suprimiera la referencia a Leibniz en la tercera edición de 1726.

Newton murió el 20 de marzo de 1727, tras haberse negado a recibir los auxilios finales de la Iglesia, consecuente con su aborrecimiento del dogma de la Trinidad.

Gottfried Wilhelm Leibniz



(Gottfried Wilhelm von Leibniz; Leipzig, actual Alemania, 1646 - Hannover, 1716) Filósofo y matemático alemán. En 1661 ingresó en la universidad de su ciudad natal para estudiar leyes y dos años después se trasladó a la Universidad de Jena, donde estudió matemáticas con E. Weigel.

Leibniz permaneció cinco años en París, donde desarrolló una fecunda labor intelectual. De esta época datan su invención de una máquina de calcular capaz de realizar las operaciones de multiplicación, división

y extracción de raíces cuadradas, así como la elaboración de las bases del cálculo infinitesimal.

Frente a la física cartesiana de la extensión, Leibniz defendió una física de la energía, ya que esta es la que hace posible el movimiento.

Representante por excelencia del racionalismo, Leibniz situó el criterio de verdad del conocimiento en su necesidad intrínseca y no en su adecuación con la realidad; el modelo de esa necesidad lo proporcionan las verdades analíticas de las matemáticas.

Junto a estas verdades de razón, existen las verdades de hecho, que son contingentes y no manifiestan por sí mismas su verdad.

Las contribuciones de Leibniz en el campo del cálculo infinitesimal, efectuadas con independencia de los trabajos de Newton, así como en el ámbito del análisis combinatorio, fueron de enorme valor.

Introdujo la notación actualmente utilizada en el cálculo diferencial e integral. Los trabajos que inició en su juventud, la búsqueda de un lenguaje perfecto que reformara toda la ciencia y permitiese convertir la lógica en un cálculo, acabaron por desempeñar un papel decisivo en la fundación de la moderna lógica simbólica.

El primero, Newton (1648-1727), es el creador de la teoría de las fluxiones, un método de naturaleza geométrico-mecánica para tratar de forma general los problemas del análisis infinitesimal. Propone el método de las fluxiones, (publicada en 1736), donde se estudian las magnitudes variables, introducidas como abstracción de las diferentes formas del movimiento mecánico continuo denominadas fluentes. Todas las fluentes son variables dependientes y tienen un argumento común, el tiempo. Después se introducen las velocidades de la corriente de los fluentes, que se denominan fluxiones.

La teoría de fluxiones resuelve dos problemas: la determinación de la relación entre fluxiones, conocida la relación entre fluentes y el recíproco, dada la relación entre fluxiones, encontrar las fluentes. Para resolver estos problemas aplicó sendos métodos basados en el uso de cantidades infinitamente pequeñas. Para el propio Newton en estos métodos resolutivos no se explicaban de forma satisfactoria. En 1704 en su obra explicita el método de las "razones primeras y últimas", en la que el incremento de la variable se "desvanece", lo que supone la explicitación de una idea de límite un tanto metafísica.

Por si fuese necesario, en su obra *Principia Mathematica* "aclara" el concepto de límite: "Cantidades, y la razón de cantidades, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales".

Leibnitz, por su parte preocupado por la claridad de los conceptos y el aspecto formal de la matemática, contribuye al nacimiento del análisis infinitesimal con su teoría sobre las diferenciales.

Se dio cuenta de que la pendiente de la rangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas, cuando se hacen infinitamente pequeñas estas diferencias. Usa una notación que perdura actualmente, pero no aclara lo que para él significa "infinitamente pequeño".

La concepción que subyace en esta etapa es una concepción geométrica de límite puesto que se trabaja en problemas de índole geométrica. La noción de límite en realidad se encuentra implícita.

Por una parte, la aproximación tiene que ser indefinida, es decir, tiene que existir la posibilidad de tomar aproximaciones cada vez mejores, cosa que se consigue en todos los métodos revisados, pero hasta Newton esta posibilidad no se plasma claramente en el hecho de que los objetos se han de aproximar "más que cualquier diferencia dada", lo cual implica que el límite debe ser la mejor de todas las aproximaciones posibles.

Todo el esfuerzo realizado en más de dos milenios permite presentar la siguiente Definición: Sea f una función y **a** un número real, el número **L** es el límite de la función f en el punto **a**, y se escribe:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Se lee límite de f(x) cuando x tiende a "a" es L, si cuando x tiende a "a", siendo distinto de "a", sus imágenes, f(x), tienden a L. Esta es la famosa definición (**ε, δ**) que desconcierta a la mayoría de los que tratan de estudiarla y sobre todo si es la primera vez que lo intentan. Varios factores son contribuyentes al desconcierto.

La humanidad empezó a lidiar con el concepto de límite, sin ser capaz de explicitarlo, desde Eudoxo hasta el siglo XX, cuando llegó a lo que ahora se conoce como límite.

Tratar de asimilar más de dos milenios en dos clases de Análisis Matemático es directamente una proeza intelectual, que los grandes de la historia del pensamiento matemático no lograron.

Límite en un punto

El límite de la función *f(x)* en el punto x_0, es el valor al que se acercan las imágenes (las *y*) cuando los originales (las *x*) se acercan al valor x_0. Es decir, el valor al que tienden las imágenes cuando los originales tienden a x_0.

Nota: $x_0 = a$

Vamos a estudiar el límite de la función $f(x) = x^2$ en el punto $x_0 = 2$.

x	f(x)
1,9	3,61
1,99	3,9601
1,999	3,996001
...	...
↓	↓
2	4

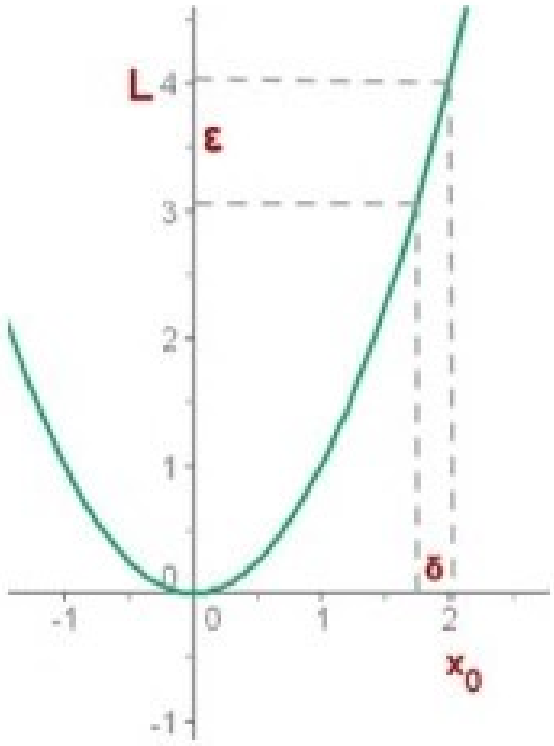
x	f(x)
2,1	4.41
2,01	4,0401
2,001	4,004001
...	...
↓	↓
2	4

Tanto si nos acercamos a 2 por la izquierda o la derecha las imágenes se acercan a 4.

Se dice que la función f(x) tiene como límite el número L, cuando x tiende a x_0, si fijado un número real positivo ε, mayor que cero, existe un numero positivo δ dependiente de

ε, tal que, para todos los valores de x distintos de x_0 que cumplen la condición: $|x - x_0| < \delta$, se cumple que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



También podemos definir el concepto de límite a través de entornos.

Continuidad de una función en un punto

Se dice que una función f(x) es continua en un punto x = a si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. Que el punto x = a tenga imagen.

$$\exists f(a)$$

2. Que exista el límite de la función en el punto x = a.

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

3. Que la imagen del punto coincida con el límite de la función en el punto.

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Ejemplo:
Estudiar la continuidad de la función en x = 2

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 2 \\ 4 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

1. La función tiene imagen en x = 2.

$$f(2) = 4$$

2. La función tiene límite en x = 2 porque coinciden los límites laterales.

$$\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$$

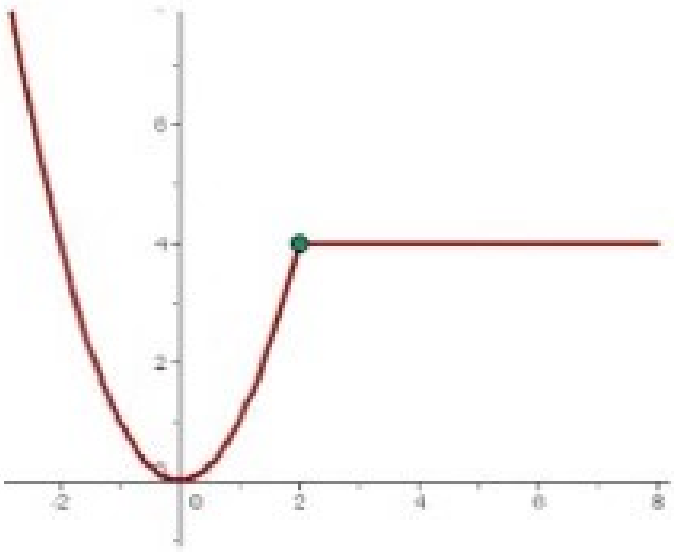
$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \to -2^+} 4 = 4$$

3. En x = 2 la imagen coincide con el límite

$$f(2) = \lim_{x \to 2} f(x)$$

En la gráfica podemos comprobar que es continua.



PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

$$\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \qquad si \quad \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{x \to a}\left[f(x)^{g(x)}\right] = \lim_{x \to a}\left[f(x)\right]^{\lim_{x \to a} g(x)} \qquad si \quad f(x) > 0$$

$$\lim_{x \to a} g[f(x)] = g \lim_{x \to a} f(x)$$

g puede ser una raíz, un log, sen ,cos, tg, etc.

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} \qquad \begin{array}{l}\text{Si n es impar}\\ \text{Si n es par } f(x)\geq 0\end{array}$$

$$\lim_{x\to a}[\log_a f(x)] = \log_a\left[\lim_{x\to a} f(x)\right] \qquad \text{Si } a>0 \text{ y } f(x)>0$$

Límites laterales

Diremos que el límite de una función f(x) cuando x tiende hacia a por la izquierda es L. Diremos que el límite de una función f(x) cuando x tiende hacia a por la derecha es L.

El límite de una función en un punto si existe, es único.

$$\lim_{x\to 2^-} x^2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} 4 = 4$$

En este caso vemos que el límite tanto por la izquierda como por la derecha cuando x tiende a 2 es 4.

El límite de la función es 4, aun cuando no tenga imagen en x=2.

Para calcular el límite de una función en un punto, no nos interesa lo que sucede en dicho punto sino a su alrededor.

Si **no** coinciden los límites laterales, la función **no** tiene límite en ese punto.

Indeterminaciones

Una indeterminación no significa que el límite no exista o no se pueda determinar, sino que la aplicación de las propiedades de los límites tal como las hemos enunciado no son válidas.

En estos casos hay que efectuar operaciones particulares para resolver cada una de las indeterminaciones.

Nota: Infinito no es un número, las operaciones que realizamos con ∞ son simplemente un recurso para ayudarnos a resolver límites.

Tipos de indeterminación

1. Infinito partido por infinito:

$$\frac{\infty}{\infty} \to Ind$$

2. Infinito menos infinito:

$$\infty - \infty \to Ind$$

3. Cero partido por cero:

$$\frac{0}{0} \rightarrow Ind$$

4. Cero por infinito:

$$0 \cdot \infty \rightarrow Ind$$

5. Cero elevado a cero:

$$0^0 \rightarrow Ind$$

6. Infinito elevado a cero:

$$\infty^0 \rightarrow Ind$$

7. Uno elevado a infinito:

$$1^\infty \rightarrow Ind$$

Límites finitos e infinitos de una sucesión

- Cuando la sucesión tiende a un punto determinado de convergencia se llama límite finito.
  Ejemplo:

$$\lim_{x \to 7} \frac{x-7}{x^2-49}$$ Este límite converge y tiende a 1/14.

- Cuando la sucesión tiende a un punto indeterminado de divergencia se llama límite infinito.
  Ejemplo:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x-2}{x^2-4}$$ Este límite diverge y tiende a infinito negativo.

Límites notables

Como ejemplo de límites notables tenemos los siguientes límites de funciones, que proveen resultados muy interesantes.

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right) = 1$$

Demostración

Para demostrar, por ejemplo, el segundo de estos límites, se utilizará la inecuación sen(x) < x < tan(x) en el intervalo (0, 90°), que relaciona x con las funciones seno y tangente. Luego dividimos por sen(x), obteniendo:

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

Elevando los términos de la inecuación a -1:

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

Calculando el límite cuando x tiende a 0:

$$\lim_{x \to 0} \cos x < \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \lim_{x \to 0} 1$$

Lo que es igual a:

$$1 < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

Aplicando el teorema del sándwich, el límite se ve forzado a valer 1:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

El tercero de los límites se demuestra utilizando las propiedades de los límites y el valor obtenido en el límite anterior. Es decir:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

Desafío: demostrar el primer límite notable.

El límite que obtiene el número **e** se demuestra de manera análoga, desarrollando el binomio de Newton y aplicando el límite cuando x tiende a infinito.

Calcular límites con forma indeterminada

1 elevado a infinito usando el límite notable (especial)

Se describe el comportamiento de la función:

f(x) = (1+x)$^{(1/x)}$ cuando x tiende a cero. El límite de esta función es una forma indeterminada uno al infinito y puede ser demostrado que su valor es un número irracional, conocido como el número **e = 2,718**.....Esta propiedad sobre *el límite de una función elevada a otra función* puede ser demostrada usando las leyes ya enunciadas de límites y la continuidad de las funciones exponencial y logaritmica.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Podemos ahorrarnos el cambio de variable y ver que si

$$g(x) \to 0 \text{ cuando } x \to 0$$

Entonces:

$$\lim_{x\to 0}(1+g(x))^{\frac{1}{g(x)}} = e$$

Calcular los siguientes límites:

1.1) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{2x}-1}$; 1.2) $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$;

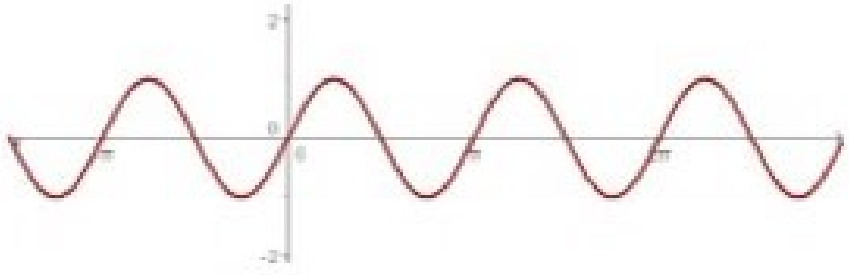
1.3) $\lim_{x\to 0}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{5}{x^2}}}$

2.1) $\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{x+2}\right)^{\frac{2}{x}}$; 2.2) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{\frac{3}{x+1}}$;

2.3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-2}{3x-2}\right)^{\frac{5}{x}}$

Continuidad: concepto gráfico

Una idea intuitiva de función continua se tiene al considerar que su gráfica es continua, en el sentido que se puede dibujar sin levantar el lápiz de la hoja de papel.



Discontinuidad de una función en un punto: Tipos

Discontinuidad evitable

Una discontinuidad es evitable en un punto x = a si existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y este es finito.

Nos encontramos con dos tipos de discontinuidad evitable:

a) La función no está definida en x = a.

$$\nexists f(a)$$

b) La imagen no coincide con el límite.

$$f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$$

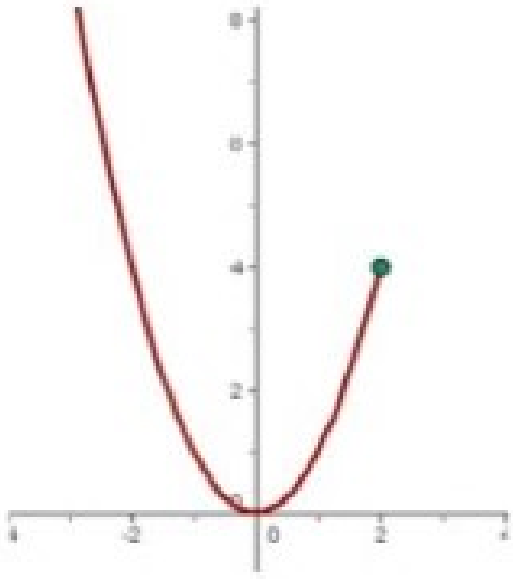
Cuando una función presenta una discontinuidad evitable en un punto se puede redefinir en dicho punto para convertirla en una función continua.

Discontinuidad esencial o inevitable

Una discontinuidad es esencial o de segunda especie si no existe alguno de los límites laterales en x = a.

$$f(x) = x^2 \quad si \quad x \leq 2$$

$$\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4 \qquad \nexists \lim_{x \to 2^+}$$



En x = 2 hay una discontinuidad esencial porque no tiene límite por la derecha.

Derivadas de funciones

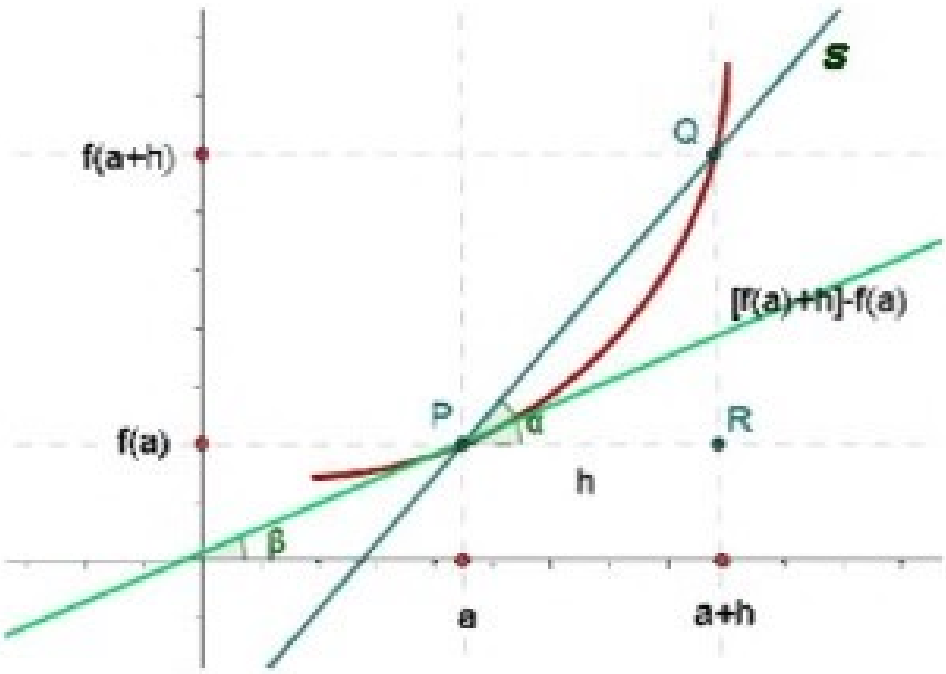
La función derivada de una función f(x) se obtiene calculando el límite del cociente incremental cuando el incremento de la variable x tiende a cero. Si existe el límite, la función es derivable. Se expresa por **f'(x)**.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Derivada en un punto

La derivada de una función f(x) en un punto x = a es el valor del límite, si existe, del cociente incremental cuando el incremento de la variable tiende a cero.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



Ejemplos

Calcular la derivada de la función $f(x) = 3x^2$ en el punto x = 2.

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(2+h)^2-3\cdot 2^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(4+4h+h^2)-12}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+12h}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\ (3h+12)=12$$

Hallar la derivada de la función $f(x) = x^2 + 4x - 5$ en $x = 1$.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 + 4(1+h) - 5 - \left(1^2 + 4\cdot 1 - 5\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 4 + 4h - 5}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 6h}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} (h + 6) = 6$$

Calcular la derivada de: $f(x) = 2x^2 - 6x + 5$ en $x = -5$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)^2 - 6(x+h) + 5 - \left(2x^2 - 6x + 5\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 6x - 6h + 5 - 2x^2 + 6x - 5}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4xh - 6h + 2h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(4x - 6 + 2h)}{h} = 4x - 6$$

$$f'(-5) = 4(-5) - 6 = -26$$

Hallar la derivada de: $f(x) = x^3 - 2x - 5$ en $x = 1$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 + 2(x+h) - 5 - \left(x^3 + 2x - 5\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2x + 2h - 5 - x^3 - 2x + 5}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\left(3x^2 + 3xh + h^2 + 2\right)}{h} = 3x^2 + 2$$

$$f'(1) = 3\,(1)^2 + 2 = 5$$

Determinar la derivada de:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ en } x = 2$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{x^2+xh}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{x^2+xh}\right)=-\frac{1}{x^2}$$

$$f'(2)=-\frac{1}{2^2}=-\frac{1}{4}$$

Calcula el valor de la derivada:

$f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ en x = 2.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+h}{x+h-1}-\frac{x}{x-1}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x^2-x+hx-h-x^2-hx+x}{(x+h-1)(x-1)}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{(x+h-1)(x-1)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h-1)(x-1)}=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f'(2)=\frac{-1}{(2-1)^2}=-1$$

Hallar la derivada de:

$f(x)=\sqrt{x}$ en x = 3.

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{3+h}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)}{h\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)-3}{h\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Derivadas laterales

Derivada por la izquierda

$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Derivada por la derecha

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Una función es derivable en un punto si, y sólo si, es derivable por la izquierda y por la derecha en dicho punto y las derivadas laterales coinciden.

Ejemplo
Estudiar el valor de la derivada de:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0.$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{-(0+h) - 0}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{0 + h - 0}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

Pendiente

La pendiente de la recta tangente a una curva en un punto es la derivada de la función en dicho punto.

$$\text{tg}\beta = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{h} = f'(a)$$

Ecuación de la recta tangente

La recta tangente a una curva en un punto es aquella que pasa por el punto (a, f(a)) y cuya pendiente es igual a f'(a).

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Problemas

1.-Calcular los puntos en que la tangente a la curva $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ es paralela al eje OX.

$y' = 3x^2 - 6x - 9$; $x^2 - 2x - 3 = 0$ (simplificando por 3)
$x_1 = 3\ y_1 = -22$
$x_2 = -1 y_2 = 10$

A(3, –22) B(–1, 10)

2.- Se ha trazado una recta tangente a la curva $y = x^3$, cuya pendiente es 3 y pasa por el punto (0, –2). Hallar el punto de tangencia.
Sea el punto de tangencia (a, f(a))
$f'(x) = 3x^2$ $f'(a) = 3a^2$
$3a^2 = 3a = \pm 1$

Las ecuaciones de las rectas tangentes son:
$a = 1$ $f(a) = 1$
$y - 1 = 3(x - 1)$ $y = 3x - 2$
$a = -1$; $f(a) = -1$
$y + 1 = 3(x + 1)$; $y = 3x + 2$
El punto (0, –2) pertenece a la recta $y = 3x - 2$.
Por tanto, el punto de tangencia será **(1, 1).**

3.- Encontrar los puntos de la curva $f(x) = x^4 + 7x^3 + 13x^2 + x + 1$, para los cuales la tangente forma un ángulo de 45º con OX.
$m = 1$
$f'(x) = 4x^3 + 21x^2 + 26x + 1$
$4x^3 + 21x^2 + 26x + 1 = 1$
$x = 0$ $x = -2$ $x\ z = 13/4$

P(0, 4) Q(–2, 4) R(13/4, 1621/256)

4.- Dada la función f(x) = tg x, hallar el ángulo que forma la recta tangente a la gráfica de la función f(x) en el origen, con el eje de abscisas.
$f'(x) = 1 + tg^2 x$ $f'(0) = 1 = m$
$y = x$
$\alpha = \text{arc tg } 1 =$ **45º**

5.- Hallar los coeficientes de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, sabiendo que su gráfica pasa por (0, 3) y por (2, 1), y en este último punto su tangente tiene de pendiente 3.
Pasa por (0, 3), entonces $3 = c$
Pasa por (2, 1), entonces $1 = 4a + 2b + c$
$y' = 2ax + b$, $3 = 4a + b$

Resolviendo el sistema se obtiene:
a = 2; b = –5; c = 3

6.- La gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos (2, 3) y (3, 13). Siendo la tangente a la misma en el punto de abscisa 1 paralela a la bisectriz del primer cuadrante. Hallar el valor numérico de a, b y c.

Pasa por (2, 3) $3 = 4a + 2b + c$

Pasa por (3, 13)$13 = 9a + 3b + c$

$y' = 2ax + b$ $1 = 2a + b$

Resolviendo el sistema se obtiene:

a = 3; b = –5; c =1

7.- Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determina a, b, c y d; sabiendo que la curva pasa por los puntos (–1, 2) (2, 3), y que las tangentes a ellas en los puntos de abscisa 1 y –2 son paralelas al eje de abscisas.

$f(-1) = 2$; $-a + b - c + d = 2$

$f(2) = 3$; $8a + 4b + 2c + d = 3$

$f'(-1) = 0$; $3a + 2b + c = 0$

$f'(2) = 0$ $12a - 4b + c = 0$

a = – 2 /9; b = – 1 /3; c = 4/3; d = 31/9

Ejemplos

Determinar la función derivada de $f(x) = x^2 - x + 1$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - (x+h) + 1 - \left(x^2 - x + 1\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x - h + 1 - x^2 + x - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2 - h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h\left(2x + h - 1\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(2x + h - 1\right) = 2x - 1$$

Calcular $f'(-1)$, $f'(0)$ y $f'(1)$

$f'(-1) = 2(-1) - 1 = -3$

$f'(0) = 2(0) - 1 = -1$

$f'(1) = 2(1) - 1 = 1$

Derivada de las funciones a trozos

En las funciones definidas a trozos es necesario estudiar las derivadas laterales en los **puntos** de separación de los distintos trozos.

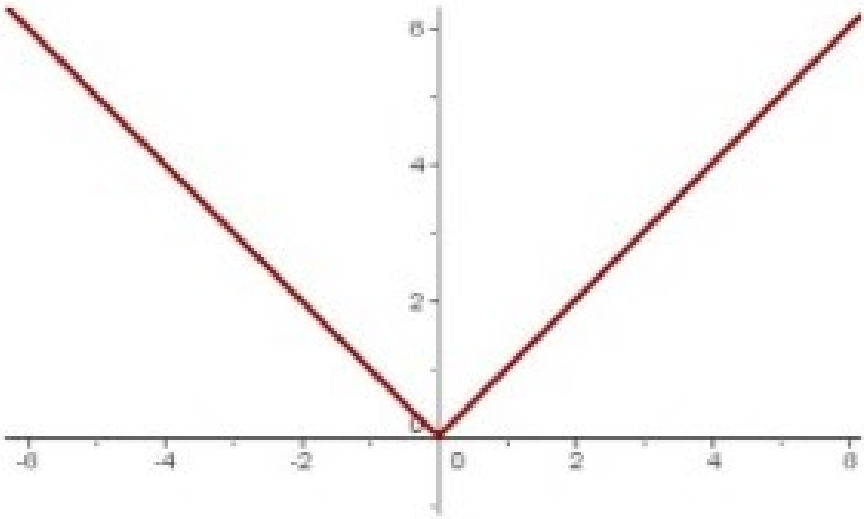
Estudiar la derivabilidad de la función f(x) = |x|.

$$f(x)=\begin{cases} -x & Si\ \ x<0 \\ x & Si\ \ x\geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{-(0+h)-0}{h}=\frac{-h}{h}=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{0+h-0}{h}=\frac{h}{h}=1$$

Puesto que las derivadas laterales en **x = 0** son distintas, la función no es derivable en dicho punto.



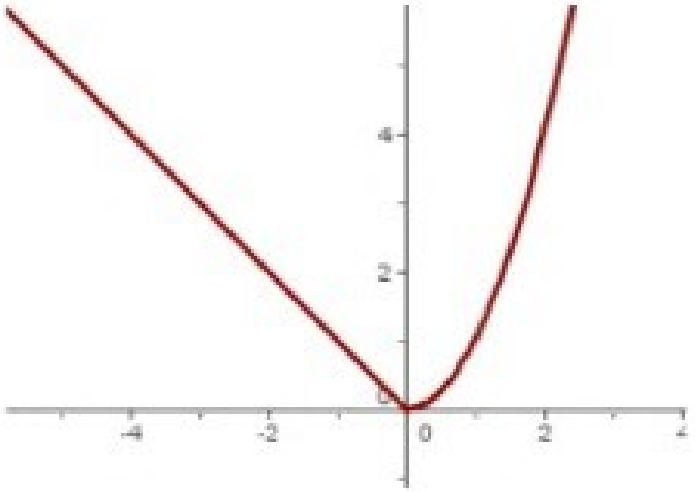
Las derivadas laterales no coinciden en los picos ni en los puntos angulosos de las funciones. Por tanto, en esos puntos no existe la derivada.

$$f(x)=\begin{cases} -x & Si\ \ x<0 \\ x^2 & Si\ \ x\geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{-(0+h)-0}{h}=\frac{-h}{h}=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(0+h)^2-0}{h}=\lim_{x\to 0^+}\frac{h^2}{h}=\lim_{x\to 0^+}h=0$$

No es derivable en x = 0.



Hallar el punto en que $y = |x + 2|$ no tiene derivada. Justificar el resultado, representando su gráfica.

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x < -2 \\ x + 2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

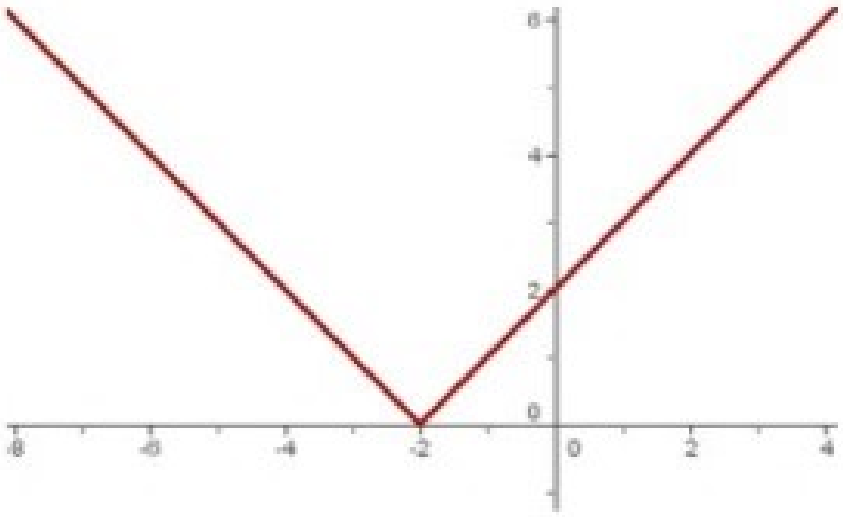
$$f(-2) = \lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = 0$$

La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -2 \\ 1 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

$f'(-2)^- = -1; f'(-2)^+ = 1$

No será derivable en: x= -2.



En x = -2 hay un pico, por lo que no es derivable en x= -2.

Hallar los puntos en que $y = |x^2 - 5x + 6|$ no tiene derivada. Justificar el resultado representando su gráfica.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5x+6 & \text{si } x<2 \\ -x^2+5x-6 & \text{si } 2\le x<3 \\ x^2-5x+6 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$$

$$f(2)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=0$$

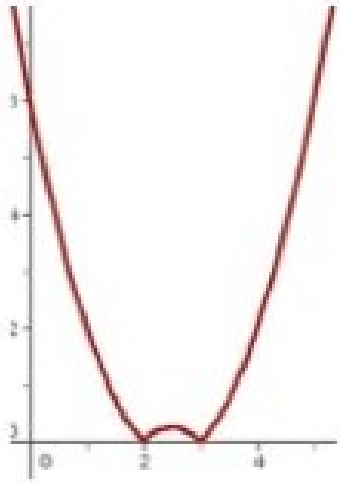
$$f(3)=\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=0$$

La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-5 & \text{si } x<2 \\ -2x+5 & \text{si } 2<x<3 \\ 2x-5 & \text{si } x>3 \end{cases}$$

$f'(2)^- = -1$; $f'(2)^+ = 1$
$f'(3)^- = -1$; $f'(3)^+ = 1$

Como no coinciden las derivadas laterales la función no será derivable en: x = 2 ni en x = 3.



Podemos observar que en x = 2 y en x = 3 tenemos dos puntos angulosos, por lo que la función no será derivable en ellos.

Derivada de una constante

La derivada de una constante es cero.

$$f(x)=k \qquad f'(x)=0$$

Derivada de x

La derivada de x es igual a 1. Es decir, la derivada de la función identidad es igual a la unidad.

$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$

Derivada de una potencia

La derivada de una potencia o función potencial es igual al exponente por la base elevada al exponente menos uno y por la derivada de la base.

$$f(x) = u^k \qquad f'(x) = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$$

Si la base es la función identidad, la derivada es igual al exponente por la base elevada al exponente menos uno.

$$f(x) = x^k \; f'(x) = k \cdot x^{k-1}$$

Derivada de una raíz

La derivada de la raíz enésima de una función es igual a la derivada del radicando partida por la n veces la raíz enésima de la función radicando elevada a n menos uno.

$$f(x) = \sqrt[k]{u} \qquad f'(x) = \frac{u'}{k \cdot \sqrt[k]{u^{k-1}}}$$

$$f(x) = \sqrt[k]{x} \qquad f'(x) = \frac{1}{k \cdot \sqrt[k]{x^{k-1}}}$$

Derivada de la raíz cuadrada

La derivada de la raíz cuadrada de una función es igual a la derivada del radicando partida por el doble de la raíz.

$$f(x) = \sqrt{u} \qquad f'(x) = \frac{u'}{2 \cdot \sqrt{u}}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

Derivada de una suma

La derivada de una suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas de dichas funciones.

Esta regla se extiende a cualquier número de sumandos, ya sean positivos o negativos.

$$f(x) = u \pm v \qquad f'(x) = u' \pm v'$$

Derivada del producto

La derivada del producto de dos funciones es igual al primer factor por la derivada del segundo más el segundo factor por la derivada del primero.

$$f(x)=u\cdot v \qquad f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$$

Derivada de una constante por una función

La derivada del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

$$f(x)=k\cdot u \qquad f'(x)=k\cdot u'$$

Derivada de un cociente

La derivada del cociente de dos funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador menos la derivada del denominador por el numerador, divididas por el cuadrado del denominador.

$$f(x)=\frac{u}{v} \qquad f'(x)=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

Derivada de una constante partida por una función

$$f(x)=\frac{k}{v} \qquad f'(x)=\frac{-k\cdot v'}{v^2}$$

Derivada de la función exponencial

La derivada de la función exponencial es igual a la misma función por el logaritmo neperiano de la base y por la derivada del exponente.

$$f(x)=a^u \qquad f'(x)=u'\cdot a^u\cdot \ln a$$
$$f(x)=a^x \qquad f'(x)=a^x\cdot \ln a$$

Derivada de la función exponencial de base e

La derivada de la función exponencial de base e es igual a la misma función por la derivada del exponente.

$$f(x)=e^u \qquad f'(x)=u'\cdot e^u$$
$$f(x)=e^x \qquad f'(x)=e^x$$

Derivada de la función logaritmica

La derivada de un logaritmo en base a es igual a la derivada de la función dividida por la función, y por el logaritmo en base a de e.

$$f(x)=\log_a u \qquad f'(x)=\frac{u'}{u}\cdot \log_a e$$

Como $\log_a e = \dfrac{\ln e}{\ln a} = \dfrac{1}{\ln a}$, también se puede expresar así:

$$f(x) = \log_a u \qquad f'(x) = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\ln a}$$

$$f(x) = \log_a x \qquad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

Derivada de un logaritmo neperiano

La derivada del logaritmo neperiano es igual a la derivada de la función dividida por la función.

$$f(x) = \ln u \qquad f'(x) = \frac{u'}{u}$$

$$f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$

Derivada de la función seno

La derivada del seno de una función es igual al coseno de la función por la derivada de la función.

$$f(x) = \operatorname{sen} u \qquad f'(x) = u' \cdot \cos u$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad f'(x) = \cos x$$

Derivada de la función coseno

La derivada del coseno de una función es igual a menos el seno de la función por la derivada de la función.

$$f(x) = \cos u \qquad f'(x) = -u' \cdot \operatorname{sen} u$$

$$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\operatorname{sen} x$$

Derivada de la función tangente

La derivada de la función tangente es igual al cuadrado de la secante de la función por la derivada de la función.

$$f(x) = tg\ u \qquad f'(x) = \frac{u'}{\cos^2 u} = u' \cdot \sec^2 u = u' \cdot (1 + tg^2 u)$$

$$f(x) = tg\ x \qquad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + tg^2 x$$

Aplicaciones de la derivada

A) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones siguientes:

1.-

$f(x) = 4 + 15x + 6x^2 - x^3$

$f'(x) = 15 + 12x - 3x^2 \qquad 15 + 12x - 3x^2 = 0$

$x = -1 \qquad x = 5$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,5)$	$(5,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Creciente: $(-1,5)$

Decreciente: $(-\infty,-1) \cup (5,\infty)$

2.-

$f(x) = 3x^4 - 20x^3 - 6x^2 + 60x - 8$

$f'(x) = 12x^3 - 60x^3 - 12x + 60 = 12\left(x^3 - 5x^2 - x + 5\right)$

$x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0 \qquad x = \pm 1 \qquad x = 5$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,5)$	$(5,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Creciente: $(-1,1) \cup (5,\infty)$

Decreciente: $(-\infty,-1) \cup (1,5)$

3.-

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-2}$$

$x^2 + x - 2 = 0 \qquad x = -2 \qquad x = 1$

$D = \mathbb{R} - \{-2,1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 + x - 2 - (x+1)(2x+1)}{\left(x^2+x-2\right)^2} = \frac{-\left(x^2+2x+3\right)}{\left(x^2+x-2\right)^2}$$

$$\frac{-\left(x^2+2x+3\right)}{\left(x^2+x-2\right)^2} = 0 \qquad x^2 + 2x + 3 = 0$$

Sin soluciones en $\mathbb{R}$

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$		
	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

Decreciente: $\mathbb{R} - \{-2,1\}$

Matemática

4.-

$f(x)=\sqrt{x+1}$

$x+1\geq 0 \qquad x\geq -1$

$D=[-1,\infty)$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

x	$(-1,\infty)$
$f'(x)$	$+$
	$\nearrow$

Creciente: $(-1,\infty)$

5.-

$f(x)=e^{-(x-1)^2}$

$f'(x)=-2(x-1)e^{-(x-1)^2} \qquad -2(x-1)e^{-(x-1)^2}=0 \qquad x=1$

x	$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
	$\nearrow$	$\searrow$

Creciente: $(-\infty,1)$

Decreciente: $(1,\infty)$

6.-

$f(x)=x\cdot\ln x$

$x>0 \qquad D=(0,\infty)$

$f'(x)=\ln x+x\dfrac{1}{x}=\ln x+1$

$\ln x+1=0 \qquad \ln x=-1 \qquad x=e^{-1}$

x	$(0,e^{-1})$	(e^{-1},∞)
$f'(x)$	$-$	$+$
	$\searrow$	$\nearrow$

Creciente: (e^{-1},∞)

Decreciente: $(0,e^{-1})$

B) Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

7.-

$f(x)=x^4-8x^2+3$

$f'(x)=4x^3-16x$ $\qquad 4x^3-16x=0$

$x=-2 \qquad x=0 \qquad x=2$

$f''(x)=12x^2-16$

$f''(-2)=12(-2)^2-16>0$ Mínimo $(-2,-13)$

$f''(0)=12(0)^2-16<0$ Máximo $(0,3)$

$f''(2)=12(2)^2-16>0$ Mínimo $(2,-13)$

8.-

$f(x)=e^x\left(2x^2+x-8\right)$

$f'(x)=e^x\left(2x^2+x-8\right)+e^x\left(4x+1\right)=e^x\left(2x^2+5x-7\right)$

$e^x\left(2x^2+5x-7\right)=0 \qquad x=1 \qquad x=-\frac{7}{2}$

$f''(x)=e^x\left(2x^2+9x-2\right)$

$f''(1)=e^1\left(2\cdot1^2+9\cdot1-2\right)>0$ $\qquad f(1)=-5e$

Mínimo $(1,-5e)$

$f''\left(-\frac{7}{2}\right)=e^{-\frac{7}{2}}\left(2\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)^2+9\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)-2\right)<0 \qquad f\left(-\frac{7}{2}\right)=13e^{-\frac{7}{2}}$

Máximo $\left(-\frac{7}{2},13e^{-\frac{7}{2}}\right)$

9.-

$f(x)=x+\ln\left(x^2-1\right)$

$x^2-1>0 \qquad x^2-1=0 \qquad x=\pm1$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
	$+$	$-$	$+$

$D=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

$f'(x)=1+\frac{2x}{x^2-1}=\frac{x^2+2x-1}{x^2-1}$

$\frac{x^2+2x-1}{x^2-1}=0 \qquad x=-1+\sqrt{2}\notin D \qquad x=-1-\sqrt{2}$

$$f''(x)=\frac{-2\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2} \qquad f''(-1-\sqrt{2})=\frac{-2\left((-1-\sqrt{2})^2+1\right)}{\left((-1-\sqrt{2})^2-1\right)^2}<0$$

En $x=-1-\sqrt{2}$ hay un máximo

10.-

$f(x)=\operatorname{sen} 2x$

$f'(x)=2\cos 2x \qquad 2\cos 2x=0$

$2x=\frac{\pi}{2}+2\pi k \qquad x_1=\frac{\pi}{4}+k\pi$

$2x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k \qquad x_1=\frac{3\pi}{4}+k\pi$

$f''(x)=-4\operatorname{sen} 2x$

$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4\operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{4}\right)<0 \qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

Máximo $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi,1\right)$

$f''\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-4\operatorname{sen} 2\left(\frac{3\pi}{4}\right)>0 \qquad f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\operatorname{sen} 2\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-1$

Mínimo $\left(\frac{3\pi}{4}+k\pi,-1\right)$

C) Hallar los intervalos de concavidad y convexidad, y los puntos de inflexión de las funciones:

11.-

$f(x)=x^3-6x^2+11$

$f'(x)=3x^2-12x$

$f''(x)=6x-12 \qquad 6x-12=0 \qquad x=2$

x	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
	$\cap$	$\cup$

Cóncava: $(2,\infty)$ Convexa: $(-\infty,2)$

$f'''(x)=6>0$

Punto de inflexión $(2,-5)$

12.-

$f(x)=x^4-6x^2+4$

$f'(x)=4x^3-12x$

$f''(x)=12x^2-12$

$12x^2-12=0 \qquad x=\pm 1$

$f'''(x)=24x$

$f'''(1)=24\cdot 1\neq 0 \qquad f(1)=1^4-6\cdot 1^2+4=-1$

$f'''(-1)=24(-1)\neq 0 \qquad f(-1)=(-1)^4-6\cdot(-1)^2+4=-1$

Puntos de inflexión: $(1,-1),(-1,-1)$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Cóncava: $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ Convexa: $(-1,1)$

13.-

$f(x)=e^{-x^2}$

$f'(x)=-2e^{-x^2}$

$f''(x)=-2e^{-x^2}-2xe^{-x^2}(-2x)=2e^{-x^2}(2x^2-1)$

$2e^{-x^2}(2x^2-1)=0 \qquad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f'''=-4x\cdot e^{-x^2}(2x^2-1)+2e^{-x^2}\cdot 4x=-4x\cdot e^{-x^2}(2x^2-3)$

$f'''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\neq 0 \qquad f'''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\neq 0$

Puntos de inflexión: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad \left(\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right)$

x	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\infty\right)$
$f'''(x)$	$+$	$-$	$+$
	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Cóncava: $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\infty\right)$ Convexa: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Aplicación a la matemática financiera

La cotización de las acciones de una determinada sociedad, suponiendo que la Bolsa funciona todos los días de un mes de 30 días, responde a la siguiente ley:

$$C = 0.01x^3 - 0.45x^2 + 2.43x + 300$$

- Determinar la cotización máxima y mínima, así como los días en que ocurrieron, en días distintos del primero y del último.
- Determinar los periodos de tiempo en el que las acciones subieron o bajaron.

$C'(x) = 0.03x^2 - 0.9x + 2.43$

$0.03x^2 - 0.9x + 2.43 = 0 \qquad x = 27 \qquad x = 3$

$C''(x) = 0.06x - 0.9$

$C''(27) = 0.06 \cdot 27 - 0.9 > 0$ Mínimo el día 27

$C''(3) = 0.06 \cdot 3 - 0.9 < 0$ Máximo el día 3

- Determinar los períodos de tiempo en el que las acciones subieron o bajaron.
-

x	$(1,3)$	$(3,27)$	$(27,30)$
$C'(x)$	+	−	+
	↗	↘	↗

Del 1 al 3, y del 27 al 30 las acciones subieron, y del 3 al 27 bajaron.

Aplicación a las estadísticas

Supongamos que el rendimiento r en % de un alumno en un examen de una hora viene dado por:

$$r = 300t\,(1-t).$$

Donde $0 < t < 1$ es el tiempo en horas. Se pide:

- ¿En qué momentos aumenta o disminuye el rendimiento?
- ¿En qué momentos el rendimiento es nulo?
- ¿Cuándo se obtiene el mayor rendimiento y cuál es?

$$r = 300t - 300t^2$$
$$r' = 300 - 600t$$
$$300 - 600t = 0 \; t = ½$$

t	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
$r'(t)$	+	−
	↗	↘

Creciente: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ Decreciente: $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

¿En qué momentos el rendimiento es nulo?

$300t\,(1-t) = 0$; $\mathbf{t = 0}$; $\mathbf{t = 1}$

El rendimiento es nulo al empezar (t = 0) y al acabar el examen (t = 1).

¿Cuándo se obtiene el mayor rendimiento y cuál es?

$r''(t) = -600$

$r(½) = 300\,(½) - 300\,(½)^2 = 75$

Rendimiento máximo: (½, 75)

Integral indefinida

Integrar es el proceso recíproco del de derivar, es decir, dada una función **f(x)**, busca aquellas funciones **F(x)** que al ser derivadas conducen a **f(x)**.

Se dice, entonces, que **F(x)** es una primitiva o antiderivada de **f(x)**; dicho de otro modo, las primitivas de **f(x)** son las funciones derivables **F(x)** tales que:

$$\mathbf{F'(x) = f(x)}.$$

Si una función f(x) tiene primitiva, tiene infinitas primitivas, diferenciándose todas ellas en una constante.

$$\mathbf{[F(x) + C]' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)}$$

Intregral indefinida es el conjunto de las infinitas primitivas que puede tener una función.

Se representa por $\int \mathbf{f(x)\,dx}$.

Se lee: integral de f de x diferencial de **x**.

$\int$ es el signo de integración.

f(x) es el integrando o función a integrar.

dx es diferencial de **x**, e indica cuál es la variable de la función que se integra.

C es la constante de integración y puede tomar cualquier valor numérico real.

Si F(x) es una primitiva de f(x) se tiene que:

$$\mathbf{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

Para comprobar que la primitiva de una función es correcta basta con derivar.

Propiedades de la integral indefinida

1. La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de esas funciones.

$$\mathbf{\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}$$

2. La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

$$\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$$

Tabla de integrales

C es una constante; **u(x)** es una función y **u'(x)** su derivada.

En adelante, escribiremos u y u'. Entendamos que esto no es más que un abuso de notación con el fin de simplificar.

$$\int dx = x + C$$

$$\int k\, dx = k \cdot x + C$$

$$\int u^n \cdot u'\, dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln u + C$$

$$\int a^u \cdot u'\, dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\int e^u \cdot u'\, dx = e^u + C$$

$$\int sen\, u \cdot u'\, dx = cos\, u + C$$

$$\int cos\, u \cdot u'\, dx = sen\, u + C$$

$$\int \frac{u'}{cos^2 u}\, dx = \int sec^2 u \cdot u'\, dx = \int (1 + tg^2 u) \cdot u'\, dx = tg\, u + C$$

$$\int \frac{u'}{sen^2 u}\, dx = \int cos\, ec^2 u \cdot u'\, dx = \int (1 + cotg^2 u) \cdot u'\, dx = cotg\, u + C$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}\, dx = \text{arc sen u} + C$$

$$\int \frac{u'}{1 - u^2}\, dx = \text{arc tg u} + C$$

Si **u(x) = x**, u'(x) = 1, tenemos una tabla de integrales simples:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int sen\ x\ dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\ dx = sen\ x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int sec^2 x\ dx = \int (1 + tg^2 x)\ dx = tg\ x + C$$

$$\int \frac{1}{sen^2 x} \cdot dx = \int cosec^2 x\ dx = \int (1 + cotg^2 x)\ dx = -cotg\ x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx = arc\ sen\ x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot dx = arc\ tg\ x + C$$

Integrales inmediatas

Integral de una constante

1.- La integral de una constante es igual a la constante por x.

$$\int k\ dx = k \cdot x + C$$

Integral de cero

$$\int 0\ dx = C$$

Integral de una potencia

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int u^n \cdot u' \, dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

Ejercicios

1 $\int x^6 dx$

$$\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C$$

2 $\int 7x^3 dx$

$$\int 7x^3 dx = \frac{7x^4}{4} + C$$

3 $\int x^{\frac{2}{3}} dx$

$$\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + C = \frac{3x \sqrt[3]{x^2}}{5} + C$$

4 $\int \frac{3}{x^4} dx$

$$\int \frac{3}{x^4} dx = \int 3x^{-4} dx = \frac{3x^{-4+1}}{-4+1} + C \quad \frac{3x^{-3}}{-3} + C = -x^{-3} + C = -\frac{1}{x^3} + C$$

5 $\int \sqrt[3]{x \, dx}$

$$\int \sqrt[3]{x \, dx} = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + C$$

6 $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{4}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + C = \frac{4x^{\frac{3}{4}}}{3} + C = \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C$$

7 $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int x^{\frac{-2}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{-2}{3}+1}}{\frac{-2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{x} + C$$

8 $\int \frac{1}{x^2\sqrt[5]{x^2}}\,dx$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt[5]{x^2}}\,dx = \int x^{-2}x^{\frac{-2}{5}}\,dx = \int x^{\frac{-12}{5}}\,dx = \frac{x^{\frac{-12}{5}+1}}{\frac{-12}{5}+1} + C =$$

$$= \frac{x^{\frac{-7}{5}}}{\frac{-7}{5}} + C = -\frac{5}{7\sqrt[5]{x^7}} + C$$

9 $\int (x^4 - 6x^2 - 2x + 4)\,dx$

$$\int (x^4 - 6x^2 - 2x + 4)\,dx = \frac{x^5}{5} - \frac{6x^3}{3} - x^2 + 4x + C$$

10 $\int \left(3\sqrt{x} + \frac{10}{x^6}\right)\,dx$

$$\int \left(3\sqrt{x} + \frac{10}{x^6}\right)\,dx = \int \left(3x^{\frac{1}{2}} + 10x^{-6}\right)\,dx = \frac{3x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{10^{-6+1}}{-6+1} + C =$$

$$= \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{10}{5x^5} + C = 2x\sqrt{x} - \frac{2}{x^5} + C$$

11 $\int \frac{x^2 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}\,dx$

Arquimática

$$\int \frac{x^2+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}\,dx=\int\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{6}}\right)dx=$$

$$=\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}}+C=\frac{2\,x^2}{5}+\frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7}+C=\frac{2x^2\sqrt{x}}{5}+\frac{6x^6x}{7}+C$$

12 $\int\left(\sqrt{5x}+\sqrt{\frac{5}{x}}\right)dx$

$$\int\left(\sqrt{5x}+\sqrt{\frac{5}{x}}\right)dx=\int\left(\sqrt{5}\cdot x^{\frac{1}{2}}+\sqrt{5}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\sqrt{5}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\sqrt{5}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=$$

$$\sqrt{5}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\sqrt{5}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{2\sqrt{5}\cdot x\sqrt{x}}{3}+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{x}=\frac{2x\sqrt{5x}}{3}+2\sqrt{5x}+C$$

13 $\int\frac{3\sqrt{x}-5\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt[4]{x}}\,dx$

$$\int\frac{3\sqrt{x}-5\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt[4]{x}}\,dx=\int\left(\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt[4]{x}}-\frac{5\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt[4]{x}}\right)dx=\int\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{4}}-\frac{5}{2}x^{\frac{5}{12}}\right)dx=$$

$$=\frac{3}{2}\frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1}-\frac{5}{2}\frac{x^{\frac{5}{12}+1}}{\frac{5}{12}+1}+C=\frac{3}{2}\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}-\frac{5}{2}\frac{x^{\frac{17}{12}}}{\frac{17}{12}}+C=$$

$$=\frac{6}{5}\sqrt[4]{x^5}-\frac{30}{17}\sqrt[12]{x^{17}}+C$$

14 $\int sen\,x\cos x\,dx$

$$\int sen\,x\cos x\,dx=\frac{1}{2}sen^2x+C$$

15 $\int sen^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$

$$\int sen^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx = 2\int sen^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\,dx = \frac{2}{3}sen^3\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

16 $\int (tg^3x + tg^5x)\,dx$

$$\int (tg^3x + tg^5x)\,dx = \int tg^3x\,(1+tg^2x)\,dx = \frac{1}{4}tg^4x + C$$

17 $\int sec^2x\sqrt{tgx}\,dx$

$$\int sec^2x\sqrt{tgx}\,dx = \int sec^2x\,(tgx)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{(tgx)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{tg^3x} + C$$

18 $\int cot\,g\,x\sqrt{\ln sen}\,dx$

$$= \int \frac{\cos x}{sen\,x}(\ln senx)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{(\ln senx)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(\ln senx)^3} + C$$

19 $\int \frac{sen\,3x}{\sqrt{2+\cos 3x}}\,dx$

$$\int \frac{sen\,3x}{\sqrt{2+\cos 3x}}\,dx = -\frac{1}{3}\int (2+\cos 3x)^{-\frac{1}{2}}\,sen\,3x\cdot(-3)\,dx =$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{2+\cos 3x} + C$$

Integrales logarítmicas y exponenciales

$$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln u + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^u \cdot u'\,dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\int e^u \cdot u'\,dx = e^u + C$$

Ejercicios

1 $\int \frac{x^2}{x^3+8}\,dx$

$$\int \frac{x^2}{x^3+8}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+8}\,dx = \frac{1}{3}\ln(x^3+8) + C$$

2 $\int cotg\,x\,dx$

$$\int cotg\,x\,dx = \int \frac{\cos x}{sen\,x}\,dx = \ln sen\,x + C$$

3 $\int \frac{sen2x}{1+sen^2 x}\,dx$

$$\int \frac{sen2x}{1+sen^2 x}\,dx = \int \frac{2sen\,x\cos x}{1+sen^2 x}\,dx = \ln(1+sen\ x) + C$$

4 $\int \frac{dx}{tg\,x}$

$$\int \frac{dx}{tg\,x} = \int \frac{\cos x}{sen\,x}\,dx = \ln(senx) + C$$

5 $\int \frac{1}{\sqrt{x}\ (1+\sqrt{x})}\,dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\ (1+\sqrt{x})}\,dx = 2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}\,dx = 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$$

6 $\int \frac{2x^3 + x^2 - x}{x^2}\,dx$

$$\int \frac{2x^3 + x^2 - x}{x^2}\,dx = \int \left(2x + 1 - \frac{1}{x}\right)dx = x^2 - x - \ln x + C$$

7 $\int \frac{2^x}{3^x}\,dx$

$$\int \frac{2^x}{3^x}\,dx = \int \left(\frac{2}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} + C$$

8 $\int x\,e^{x^2}\,dx$

$$\int x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

9 $\int e^{\operatorname{sen}^2 x}\ \operatorname{sen} 2x\,dx$

$$\int e^{\operatorname{sen}^2 x}\ \operatorname{sen} 2x\,dx = \int e^{\operatorname{sen}^2 x}\ 2\operatorname{sen} x\cos x\,dx = e^{\operatorname{sen}^2 x} + C$$

10 $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$

$$\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx = e^{\operatorname{tg} x} + C$$

11 $\int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}} 5^{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{\ln 5}\,5^{\sqrt{x}} + C$$

12 $\int \cos 5x\, e^{\operatorname{sen} 5x}\,dx$

$$\int \cos 5x\, e^{\operatorname{sen} 5x}\,dx = \frac{1}{5}\int 5\cos 5x\, e^{\operatorname{sen} 5x}\,dx = \frac{1}{5}\,e^{\operatorname{sen} 5x} + C$$

13 $\int \frac{e^{-2x} + e^{2x}}{2}\,dx$

$$\int \frac{e^{-2x} + e^{2x}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\int e^{-2x}\cdot(-2)\,dx + \frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot 2\,dx \right) =$$

Integrales trigonométricas

Fórmulas

$$\int \operatorname{sen} u \cdot u'\,dx = -\cos u + C$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \cos u \cdot u'\,dx = \operatorname{sen} u + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \sec^2 x\,dx = \int (1 + tg^2 x)\,dx = tg\,x + C$$

$$\int \frac{u'}{\cos^2 u}\,dx = \int \sec^2 u \cdot u'\,dx = \int (1 + tg^2 u)\cdot u'\,dx = tg\,u + C$$

$$\int \frac{1}{sen^2 x}\cdot dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = \int (1 + \operatorname{cotg}^2 x)\,dx = -\operatorname{cotg}\,x + C$$

$$\int \frac{u'}{sen^2 u}\,dx = \int \operatorname{cosec}^2 u \cdot u'\,dx = \int (1 + \operatorname{cotg}^2 u)\cdot u'\,dx = -\operatorname{cotg}\,u + C$$

Ejercicios

1

$\int (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx$

$$\int (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx = \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

2 $\int (3x^2 - \sec^2 x)\, dx$

$$\int (3x^2 - \sec^2 x)\, dx = x^3 - \operatorname{tg} x$$

3 $\int e^x \operatorname{cose}^x\, dx$

$$\int e^x \operatorname{cose}^x\, dx = \operatorname{sen} e^x + C$$

4 $\int x \operatorname{sen}(x^2 + 5)\, dx$

$$\int x \operatorname{sen}(x^2 + 5)\, dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(x^2 + 5)\, 2x dx = -\frac{1}{2}\cos(x^2 + 5) + C$$

5 $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\, dx$

$$\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\, dx = \int \operatorname{sen}(\ln x)\, \frac{1}{x}\, dx = -\cos(\ln x) + C$$

6 $\int \cos^3 x\, dx$

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cos x\, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x\, dx =$$

$$\int (\cos x - \operatorname{sen}^2 x \cos x)\, dx = \cos x\, dx - \operatorname{sen}^2 x \cos x dx =$$

$$\int \cos x\, dx - \frac{1}{3}\int 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x dx = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$$

7 $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int 2 \cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}sen2x + \frac{1}{4}\int \frac{1+cos4x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}sen2x + \frac{1}{8}\,x\,\frac{1}{32}sen\,4x + C$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}sen2x + \frac{1}{32}sen\,4x + C$$

8 $\int sen^4 x \cos^3 x\,dx$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^2 sen\,x \cos^3 x\,dx =$$

$$= \int (1 - 2\cos x + \cos x)\,sen\,x \cos x\,dx$$

$$= \left(\int \cos^2 x\,sen\,x - 2\cos^1 x\,sen\,x + \cos^5 x\,sen\,x\right)dx$$

$$= -\frac{1}{3}cox^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C$$

9 $\int \frac{dx}{sen\,x\cos x}$

$$= \int \frac{sen^2 x + \cos^2 x}{sen\,x\cos x}\,dx = \int \frac{sen\,x}{\cos x}\,dx + \int \frac{\cos x}{sen\,x}\,dx =$$

$$= -\ln(\cos x) + \ln(sen\,x) + C = \ln\left(\frac{sen\,x}{\cos x}\right) + C = \ln(tg\,x) + C$$

10 $\int sen^2 4x\,dx$

$$\int sen^2 4x\,dx = \int \frac{1 - \cos 8x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}sen\,8x + C$$

11 $\int \cos^2 x\,dx$

$$\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x \cos x\,dx = \int (1 - sen^2 x)^2 \cos x\,dx =$$

$$= \int \cos x\,dx - 2\int sen^2 x \cos x\,dx + \int sen^4 x \cos x\,dx =$$

$$= sen\ x - \frac{2}{3}\ sen^3 x + \frac{1}{5}\ sen^5 x + C$$

12 $\int sec^4 x\ dx$

$$\int sec^4 x\ dx = \int sec^2 x\ sec^2 x\ dx = \int (1 + tg^2 x)\ sec^2 x\ dx =$$

$$\int (sec^2 x + sec^2 x\ tg^2 x)\ dx = tg\ x + \frac{1}{3}\ tg^3 x + C$$

13 $\int tg^2 x\ dx$

$$\int tg^2 x\ dx = \int (1 + tg^2 x - 1)\ dx = \int (1 + tg^2 x)\ dx - \int dx = tg\ x - x + C$$

14 $\int cosec^2 (3x + 1)\ dx$

$$\int cosec^2 (3x + 1)\ dx \frac{1}{3} \int cosec^2 (3x + 1)\ 3dx = -\frac{1}{3}\ cotg\ (3x + 1) + C$$

15 $\int cosec^4 x\ dx$

$$\int cosec^4 x\ dx = \int cosec^2 x\ cosec^2 x\ dx =$$

$$\int (1 + cot^2 x)\ cosec^2 x\ dx = \int cosec^2 x + cotg^2 x\ cosec^2 x\ dx =$$

$$= -\ cotg\ x - \frac{1}{3} cotg^3 x + C$$

16 $\int cotg^2 x\ dx$

$$\int cotg^2 x\ dx = \int \left[(1 + cotg^2 x) - 1 \right] dx = -\ cotg\ x - x + C$$

INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Fórmulas

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx = arc\ sen\ x + C$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = arc\ sen\,u + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\cdot dx = arc\ tg\,x + C$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2}\,dx = arc\ tg\,u + C$$

Ejercicios

1 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\,arc\ sen\ x^2 + C$$

2 $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}\,dx = arc\ sen\ e^x + C$$

3 $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}\ \frac{1}{x}\ dx = arc\ sen\ (\ln x) + C$$

4 $\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx = 2\ arc\ sen\ \sqrt{x} + C$$

5 $\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}} = \int \frac{\frac{1}{5}}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}x\right)^2}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{4}{5}}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}x\right)^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{4}{5}x\right) + C$$

6 $\int \frac{1}{5 + 5x^2}\,dx$

$$\int \frac{1}{5 + 5x^2}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \frac{1}{5}\operatorname{arc\,tg} x + C$$

7 $\int \frac{1}{5 + 16x^2}\,dx$

$$\int \frac{1}{5 + 16x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4}{1 + (4x)^2}\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} 4x + C$$

8 $\int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\,dx =$

$$\int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\,dx = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sen} x) + C$$

9 $\int \frac{x^2}{1 + x^6}\,dx$

$$\int \frac{x^2}{1 + x^6}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{1 + (x^3)^2}\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} x^3 + C$$

10 $\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\,dx$

$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\,dx = \int \frac{e^x}{1 + (e^x)^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} e^x + C$$

11 $\int \frac{3}{1 + 9x^2}\,dx$

$$\int \frac{3}{1 + 9x^2}\,dx = \int \frac{1}{1 + (3x)^2} \cdot 3dx = \operatorname{arc\,tg} 3x + C$$

12 $\int \frac{1}{x^2 + x + 1}\,dx$

ArquiMática

Vamos a transformar el denominador de modo que podamos aplicar la fórmula de la integral del arcotangente.

Transformamos el denominador en un binomio al cuadrado.

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+1}\,dx = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx =$$

Multiplicamos numerador y denominador por 4/3, para obtener uno en el denominador.

Dentro del binomio al cuadrado multiplicaremos por su raíz cuadrada de 4/3.

$$= \int \frac{\frac{4}{3}}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}\,dx = \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{2x+1}{2}\right)^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

Problemas de integrales

1.- De las infinitas funciones primitivas de la función $y = x^2 - x + 1$, ¿cuál es la que para $x = 3$ toma el valor 5?

2.- Escribe la función primitiva de $y = x^2 + 2x$ cuya representación gráfica pasa por el punto (1, 3).

3.- Hallar una función F(x) cuya derivada sea f(x) = x + 6 y tal que para x = 2 tome el valor 25.

4.- Hallar una recta cuya pendiente es 2 y pasa por el punto P (0, 4).

5.- Calcular la ecuación de la curva que pasa por P (1, 5) y cuya pendiente en cualquier punto es $3x^2 + 5x - 2$.

6.- Hallar la primitiva de la función $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$, que se anula en x=2

Ejercicio 1 resuelto

De las infinitas funciones primitivas de la función $y = x^2 - x + 1$, ¿cuál es la que para $x = 3$ toma el valor 5?

$$\int (x^2 - x + 1)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C$$

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C$$

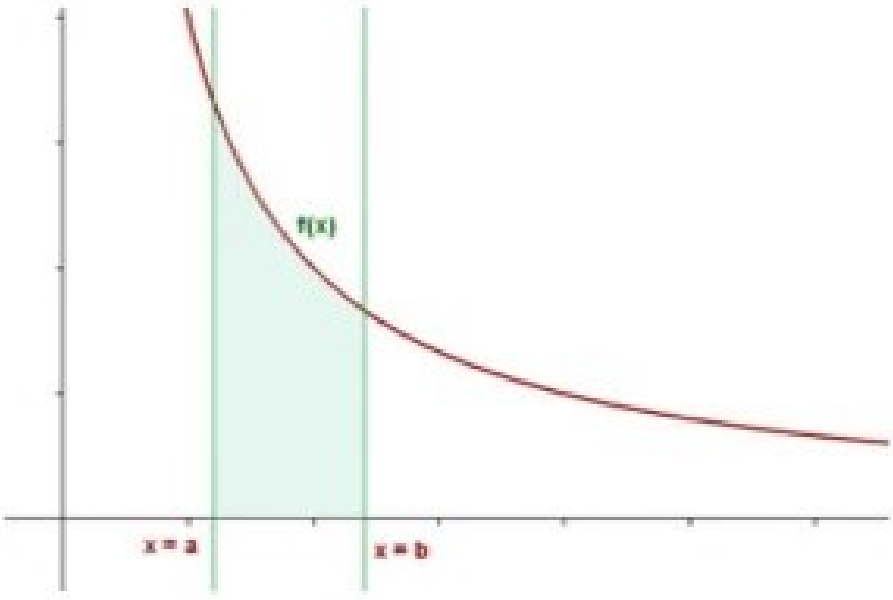
$$x = 3 \quad y = 5$$

$$5 = \frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 3 + C \qquad C = -\frac{5}{2}$$

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \frac{5}{2}$$

Integral definida

Dada una función f(x) y un intervalo [a, b], la integral definida es igual al área limitada entre la gráfica de f(x), el eje de abscisas, y las rectas verticales x = a y x = b.



La integral definida se representa por $\int_a^b f(x)\,dx$.

$\int$ es el signo de integración.

a límite inferior de la integración.

b límite superior de la integración.

f(x) es el integrando o función a integrar.

dx es diferencial de **x**, e indica cuál es la variable de la función que se integra.

Propiedades de la integral definida

1. El valor de la integral definida cambia de signo si se permutan los límites de integración.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

2. Si los límites que integración coinciden, la integral definida vale cero.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

3. Si c es un punto interior del intervalo [a, b], la integral definida se descompone como una suma de dos integrales extendidas a los intervalos [a, c] y [c, b].

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

4. La integral definida de una suma de funciones es igual a la suma de integrales.

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

5. La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

Función integral

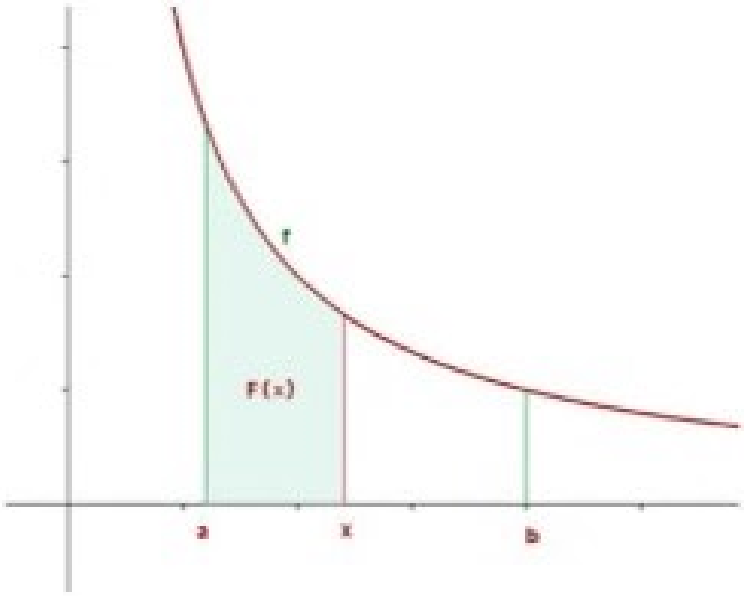
Sea **f(t)** una función continua en el intervalo **[a, b]**. A partir de esta función se define la función integral:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

Que depende del límite superior de integración.

Para evitar confusiones cuando se hace referencia a la variable de f, se la llama t, pero si la referencia es a la variable de F, se la llama x.

Geométricamente la función integral, F(x), representa el área del recinto limitado por la curva y = f(t), el eje de abscisas y las rectas t = a y t = x.



A la función integral, F(x), también se le llama función de áreas de f en el intervalo [a, b].

Regla de Barrow

La regla de Barrow dice que la integral definida de una función continua f(x) en un intervalo cerrado [a, b] es igual a la diferencia entre los valores que toma una función primitiva G(x) de f(x), en los extremos de dicho intervalo.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[G(x)\Big]_a^b = G(b) - G(a)$$

Ejemplos

1. $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{(x-1)^3}$

$$\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{(x-1)^3} = \left[\frac{-1}{2(x-1)^2}\right]_{-3}^{-2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(-2)^2} - \frac{1}{(-3)^2}\right] = -\frac{5}{72}$$

2. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \left[2\sqrt{1+x}\right]_0^3 = 2(2-1) = 2$$

3. $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 2x\,(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{1}{3}(x^2+9)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{1}{3}\left[(25)^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{98}{3}$$

4. $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

$$\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^3 2x\,(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[\sqrt{x^2-1}\right]_2^3 = \sqrt{8} - \sqrt{3}$$

5. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\operatorname{arc\,tg}\, x\right]_1^{\sqrt{3}} = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} - \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

6. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

7. $\int_0^{\pi} \operatorname{tg}^2 x\,dx$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int_0^{\pi} (\sec^2 x - 1)\,dx = \left[\operatorname{tg} x - x\right]_0^{\pi} = -\pi$$

8. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x\,dx$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x\,dx = \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x\right]_0^{\pi} = 0$$

9. $\int_2^3 \frac{dx}{x \ln^4 x}$

$$\int_2^3 \frac{dx}{x \ln^4 x} = \int_2^3 \ln^{-4} x \cdot \frac{1}{x}\,dx = \left[-\frac{1}{3\ln^3 x}\right]_2^3 = -\frac{1}{3\ln^3 3} + \frac{1}{3\ln^3 2}$$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3x\,dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos^2x)\,sen\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen\,x - cos^2x\,sen\,x)\,dx =$

$= \left[- cos\,x + \frac{1}{3} cos^3x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

11. $\int_0^{\pi} cos\,x\,e^{sen\,x}\,dx$

$\int_0^{\pi} cos\,x\,e^{sen\,x}\,dx = \left[e^{sen\,x} \right]_0^{\pi} = e^0 - e^0 = 0$

12. $\int_0^{\pi} x^2 cos\,x\,dx$

$u = x^2 \xrightarrow{derivar} u' = 2x$

$v' = cos\,x \xrightarrow{integrar} v = sen\,x$

$\int x^2 cos\,x\,dx = x^2 sen\,x - 2 \int x\,sen\,x\,dx$

$u = x \xrightarrow{derivar} u' = 1$

$v' = sen\,x \xrightarrow{integrar} v = - cos\,x$

$\int x^2 cos\,x\,dx = x^2 sen\,x - 2\,(- x\,cos\,x + \int cos\,x\,dx) =$

$= x^2 sen\,x + 2\,x\,cos\,x - 2\,sen\,x + C$

$\int_0^{\pi} x^2 cos\,x\,dx = \left[x^2 sen\,x + 2x\,cos\,x - 2sen\,x \right]_0^{\pi} = - 2\pi$

13. $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$

$x = t^2 \qquad dx = 2tdt$

$4 = t^2 \qquad t = 2$

$0 = t^2 \qquad t = 0$

$\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2t}{1 + t}\,dt = 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{1t}{1 + t} \right) dt =$

$$= 2\left[t - \ln(1+t) \right]_0^2 = 4 - 2\ln 3$$

14. $\int_{-1}^{1} (\arccos x)^2 dx$

$\arccos x = t \qquad x = \cos t \qquad dx = -\operatorname{sen} t\, dt$

$1 = \cos t \qquad t = 0$

$-1 = \cos t \qquad t = \pi$

$$\int_{-1}^{1} (\arccos x)^2 dx = -\int_{\pi}^{0} t^2 \operatorname{sen} t\, dt = \int_{0}^{\pi} t^2 \operatorname{sen} t\, dt$$

$u = t^2 \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 2t$

$v' = \operatorname{sen} t \xrightarrow{\text{integrar}} v = -\cos t$

$$\int_0^{\pi} t^2 \operatorname{sen} t\, dt = \left[-t^2 \cos t \right]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} t \cos t\, dt$$

$u = t \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 1$

$v' = \cos t \xrightarrow{\text{integrar}} v = -\operatorname{sen} t$

$$\int_0^{\pi} t^2 \operatorname{sen} t\, dt = \left[-t^2 \cos t \right]_0^{\pi} + 2\left(\left[t \operatorname{sen} t \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\, dx \right) =$$

$$= \left[-t^2 \cos t + 2t \operatorname{sen} t + 2\cos t \right]_0^{\pi} = (\pi^2 - 4)$$

Teorema fundamental del cálculo y de la media

El teorema fundamental del cálculo dice que la derivada de la función integral de la función continua f(x) es la propia f(x).

$$\mathbf{F'(x) = f(x)}$$

El teorema fundamental del cálculo nos indica que la derivación y la integración son operaciones inversas.

Al integrar una función continua y luego derivarla se recupera la función original.

Ejemplos:

1.

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

$t = x$

$dt = 1$

$$F'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

2.

$$F(x)=\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$F(x)=\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt=-\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$t = x$

$dt = 1$

$$F'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$$

3.

$$F(x)=\int_1^{x^2} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$t = x^2$

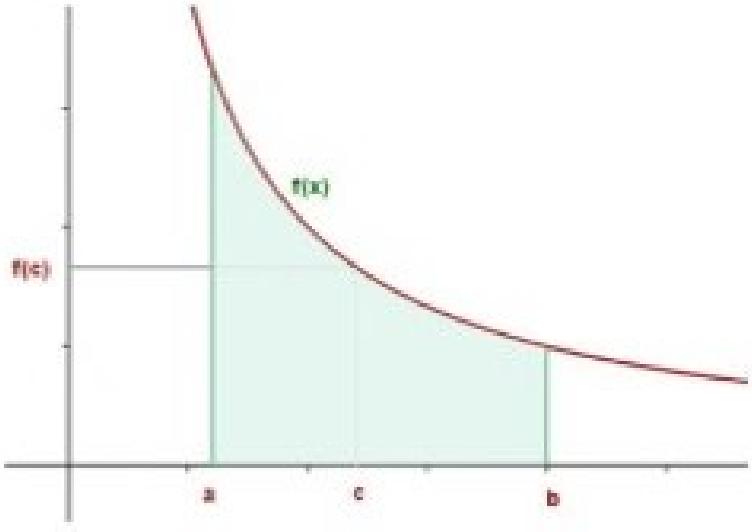
$dt = 2x$

$$F'(x)=\frac{1}{1+x^4}\cdot 2x$$

Teorema de la media o del valor medio para integrales

Si una función es continua en un intervalo cerrado [a, b], existe un punto c en el interior del intervalo tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\cdot f(c)$$



Ejemplo:

Hallar el valor de c, del teorema de la media, de la función $f(x) = 3x^2$ en el intervalo [–4, –1].

Como la función es continua en el intervalo [−4, −1], se puede aplicar el teorema de la media.

$$\int_{-4}^{-1} 3x^2\,dx = \left[x^3\right]_{-4}^{-1} = -1 + 64 = 63$$

$$63 = \left[-1-(-4)\right]\cdot f(c)$$

$$f(c) = 21 \qquad 3c^2 = 21 \qquad c = -\sqrt{7}$$

La solución positiva no es válida porque no pertenece al intervalo.

Área de funciones

Caso 1: Área entre una función positiva y el eje de abscisas

Si la función es positiva en un intervalo [a, b] entonces la gráfica de la función está por encima del eje de abscisas. El área de la función viene dada por:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Para hallar el área seguiremos los siguientes pasos:

1º Se calculan los puntos de corte con el eje OX, haciendo f(x) = 0 y resolviendo la ecuación.

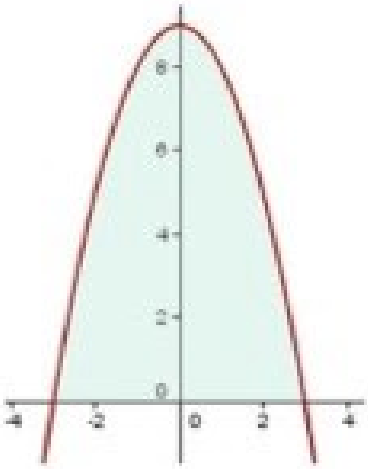
2º El área es igual a la integral definida de la función que tiene como límites de integración los puntos de corte.

Ejemplos

1. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = 9 - x^2$ y el eje X.

En primer lugar, hallamos los puntos de corte con el eje OX para representar la curva y conocer los límites de integración.

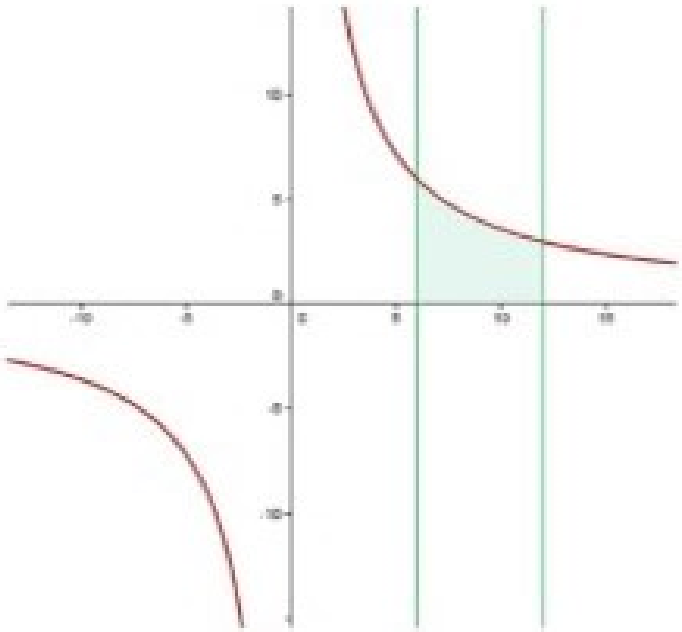
$$0 = 9 - x^2 \qquad x = 3 \qquad x = -3$$



Como la parábola es simétrica respecto al eje OY, el área será igual al doble del área comprendida entre x = 0 y x = 3.

$$A = \int_{-3}^{3} \left(9 - x^2\right) dx = 2\int_{0}^{3} \left(9 - x^2\right) dx = 2\left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 36\,u^2$$

2. Calcular el área limitada por la curva xy = 36, el eje OX y las rectas: x = 6, x = 12.



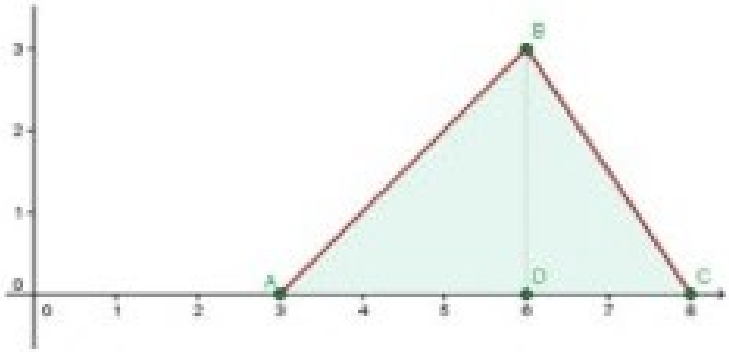
$$A = \int_6^{12} \frac{36}{x}\,dx = \left[36\ln x\right]_6^{12} = 36\ln 2\,u^2$$

3. Calcular el área del triángulo de vértices A(3, 0), B(6, 3), C(8, 0).
Ecuación de la recta que pasa por AB:

$$\frac{x-3}{6-3} = \frac{y-0}{3-0} \qquad y = x - 3$$

Ecuación de la recta que pasa por BC:

$$\frac{x-8}{6-8} = \frac{y-0}{3-0} \qquad y = -\frac{3}{2}(x-8)$$



$$A = \int_3^6 (x-3)\,dx + \int_6^8 \left[-\frac{3}{2}(x-8)\right] dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_3^6 + \left[-\frac{3}{4}x^2 + 12x\right]_6^8 =$$

$$= \left(18 - 18 - \frac{9}{2} + 9\right) + (-48 + 96 + 27 - 72) = \frac{15}{2}u^2$$

Caso 2: Área entre una función negativa y el eje de abscisas

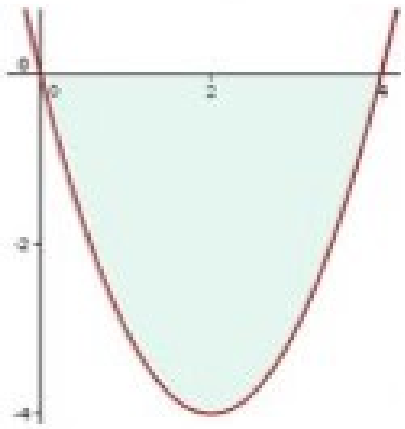
Si la función es negativa en un intervalo [a, b] entonces la gráfica de la función está por debajo del eje de abscisas. El área de la función viene dada por:

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad A = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

Ejemplos:

1. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = x^2 - 4x$ y el eje OX.

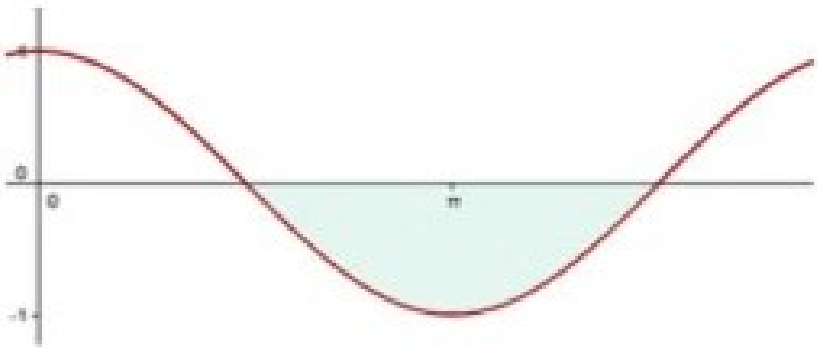
$0 = x^2 - 4x \qquad x = 0 \qquad x = 4$



$$A = \int_0^4 \left(x^2 - 4x\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_0^4 = -\frac{32}{3}$$

$$|A| = \frac{32}{3}u^2$$

2. Hallar el área limitada por la curva $y = \cos x$ y el eje Ox entre $\pi/2$ y $3\pi/2$.



$$A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx = \left[sen\,x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = sen\frac{3\pi}{2} - sen\frac{\pi}{2} = -1 - 1 = -2$$

$$|A| = 2u^2$$

Caso 3: La función toma valores positivos y negativos

En ese caso el recinto tiene zonas por encima y por debajo del eje de abscisas. Para calcular el área de la función seguiremos los siguientes pasos:

1º Se calculan los puntos de corte con el eje OX, haciendo f(x) = 0 y resolviendo la ecuación.

2º Se ordenan de menor a mayor las raíces, que serán los límites de integración.

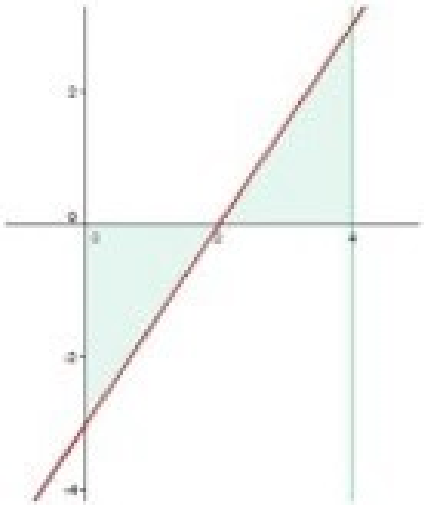
3º El área es igual a la suma de las integrales definidas en valor absoluto de cada intervalo.

Ejemplos

1. Hallar el área limitada por la recta

$$y = \frac{3x-6}{2}$$

El eje de abscisas y las ordenadas correspondientes a x = 0 y x = 4.

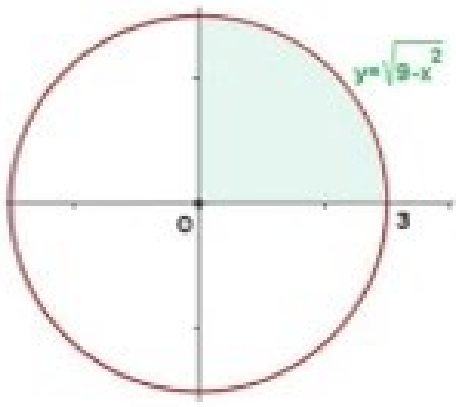


$$A_1 = \int_0^2 \left(\frac{3x-6}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}x^2 - 6x\right]_0^2 = \frac{1}{2}(6-12) = -3$$

$$A_2 = \int_2^4 \left(\frac{3x-6}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}x^2 - 6x\right]_2^4 = \frac{1}{2}\left[(24-24)-(6-12)\right] = 3$$

$$A = |A_1| + A_2 = |-3| + 3 = 6\,u^2$$

2. Calcular el área limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 9$.



El área del círculo es cuatro veces el área encerrada en el primer cuadrante y los ejes de coordenadas.

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx$$

$$x = 3\operatorname{sen} t$$

$$dx = 3\cos t\,dt$$

$$\int_0^r \sqrt{9-x^2} = \int \sqrt{9-9\operatorname{sen}^2 t}\,3\cos t\,dt = \int \sqrt{9\left(1-\operatorname{sen}^2 t\right)}\,3\cos t\,dt =$$

$$= \int 9\cos^2 t\,dt = 9\int \cos^2 t\,dt = 9\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = 9\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2t\right] + C$$

Hallamos los nuevos límites de integración.

$x = 0$	$0 = r\operatorname{sen} t$	$\operatorname{sen} t = 0$	$t = 0$
$x = 3$	$3 = 3\operatorname{sen} t$	$\operatorname{sen} t = 1$	$t = \frac{\pi}{2}$

$$A_1 = 9\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 9\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = \frac{9}{4}\pi$$

$$A = 4A_1 = 9\pi\,u^2$$

Área comprendida entre dos funciones

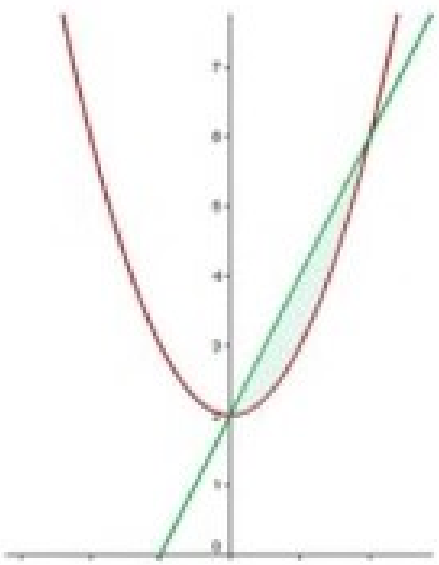
El área comprendida entre dos funciones es igual al área de la función que está situada por encima menos el área de la función que está situada por debajo.

$$\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx$$

Ejemplos:

1. Calcular el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2 + 2$ y la recta que pasa por los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 4)$.

$$\frac{x+1}{1+1} = \frac{y}{4} \qquad 4(x+1) = 2y \qquad y = 2x+2$$

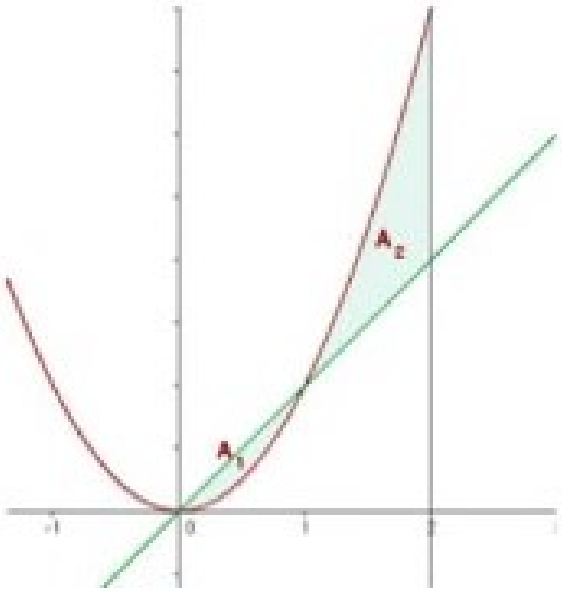


$$\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = 2x + 2 \end{cases} \qquad x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

$$\int_0^2 \left(2x + 2 - x^2 - 2\right) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} u^2$$

2. Hallar el área de la figura limitada por: $y = x^2$, $y = x$, $x = 0$, $x = 2$.
Puntos de corte de la parábola y la recta $y = x$.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases} \qquad x^2 = x \qquad x = 0 \quad x = 1$$



De $x = 0$ a $x = 1$, la recta queda por encima de la parábola.

$$A_1 = \int_0^1 \left(x - x^2\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6} u^2$$

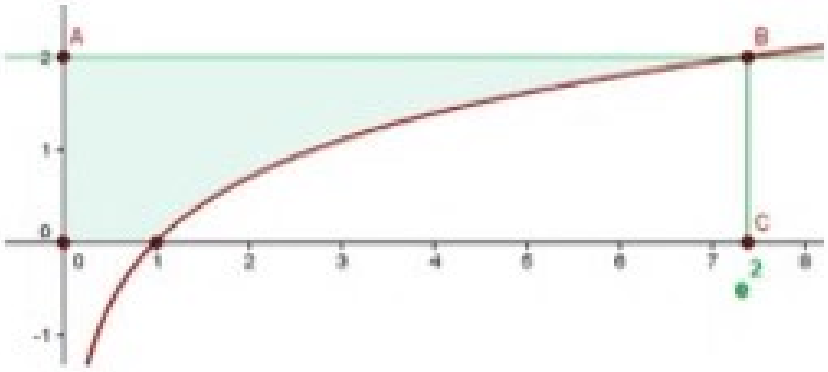
De $x = 1$ a $x = 2$, la recta queda por debajo de la parábola.

$$A_2 = \int_1^2 \left(x^2 - x\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{5}{6} u^2$$

$$A = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1\ u^2$$

3. Hallar el área de la región del plano limitada por las curvas $y = \ln x$, $y = 2$ y los ejes coordenados.
Calculamos el punto de corte de la curva y la recta $y = 2$.

$\ln x = 2 \qquad e^2 = x$



El área es igual al área del rectángulo OABC menos el área bajo la curva y = ln x.
El área de rectángulo es base por altura.

$$A_1 = e^2 \cdot 2 = 2e^2\ u^2$$

El área bajo la curva y = ln x es:

$$A_2 = \int_1^{e^2} \ln x\, dx$$

$$v = \ln x \xrightarrow{\text{derivar}} v' = \frac{1}{x}$$

$$v' = 1 \xrightarrow{\text{integrar}} v = x$$

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

$$A_2 = \int_1^{e^2} \ln x\, dx = \left[x\ln x - x\right]_1^{e^2} = 2e^2 - e^2 + 1 = \left(e^2 + 1\right)u^2$$

$$A = 2e^2 - e^2 - 1 = \left(e^2 - 1\right)u^2$$

4. Hallar el área del recinto plano y limitado por la parábola $y = 4x - x^2$ y las tangentes a la curva en los puntos de intersección con el eje OX.
Puntos de intersección:

$$4x - x^2 = 0 \qquad x(4 - x) = 0 \qquad (0,0) \quad (4,0)$$

Ecuación de la tangente a la parábola en el punto (0, 0):

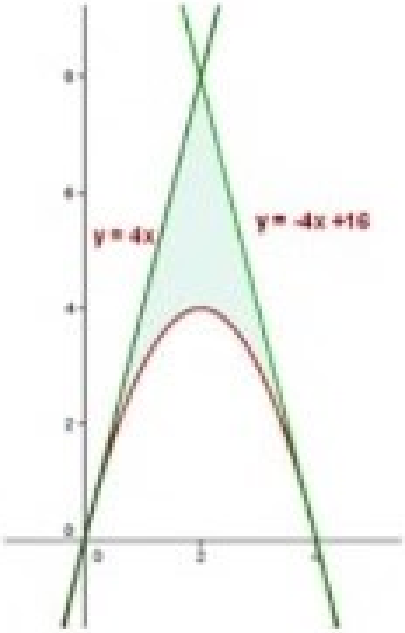
$$y' = 4 - 2x \qquad m = f'(0) = 4$$

$$y - 0 = 4(x - 0) \qquad y = 4x$$

Ecuación de la tangente a la parábola en el punto (4, 0):

$y' = 4 - 2x$ $\qquad m = f'(4) = -4$

$y - 0 = -4(x - 4)$ $\qquad y = -4x + 16$



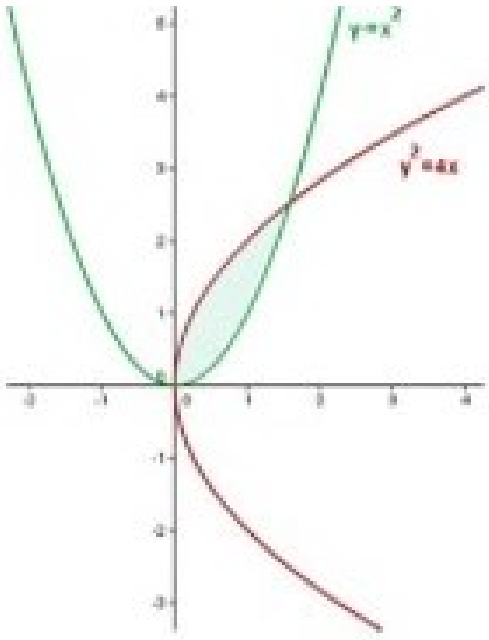
$$A = \int_0^2 \left[4x - \left(4x - x^2\right)\right] dx + \int_2^4 \left[\left(-4x + 16\right) - \left(4x - x^2\right)\right] dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} + 16x\right]_2^4 = \frac{16}{3}u^2$$

5. Calcular el área limitada por las funciones $y^2 = 4x$ e $y = x^2$.

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = x^2 \end{cases} \qquad \left(x^2\right)^2 = 4x \qquad x^4 - 4x = 0 \qquad x\left(x^3 - 4\right) = 0$$

$x = 0$ $\qquad x = \sqrt[3]{4}$



$$A = \int_0^{\sqrt[3]{4}} \left(2\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt[3]{4}} = \frac{4}{3}u^2$$

Arquimática

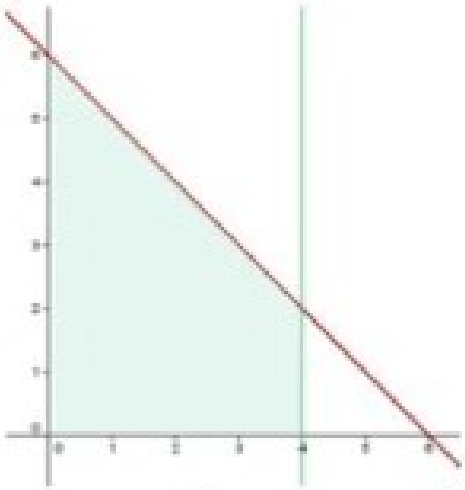
Volumen de una función

El volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar la curva f(x) alrededor del eje OX y limitado por x = a y x = b, viene dado por:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

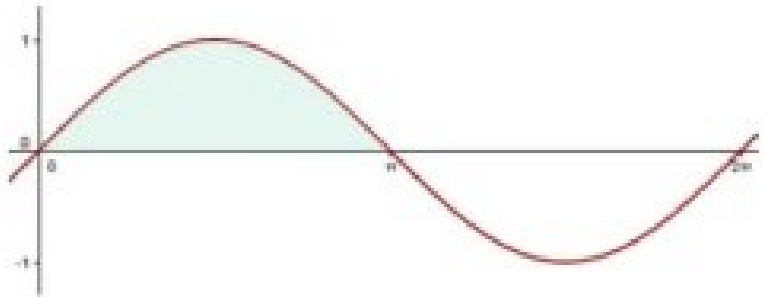
Ejemplos:

1. Hallar el volumen del tronco de cono engendrado por la rotación alrededor OX del área limitada por y = 6 – x, y = 0, x = 0, x = 4.



$$V = \pi \int_0^4 (6-x)^2 \, dx = \pi \left[36x - 6x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{208\pi}{3} \, u^3$$

2. Calcular el volumen engendrado por una semionda de la sinusoide y = sen x, al girar alrededor del eje OX.



$$V = \pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \, dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} (\pi - 0) = \frac{\pi^2}{2} \, u^3$$

3. Hallar el volumen del cuerpo revolución engendrado al girar alrededor del eje OX, la región determinada por la función f(x) = 1/2 + cos x, el eje de abscisas y las rectas x = **0** y x = **p**.

$$V = \pi\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)^2 dx = \pi\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{4}+\cos x+\cos^2 x\right) dx =$$

$$= \pi\left[\frac{1}{4}x+\operatorname{sen} x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\right]_0^{\pi} = \frac{3\pi^2}{4}\ u^3$$

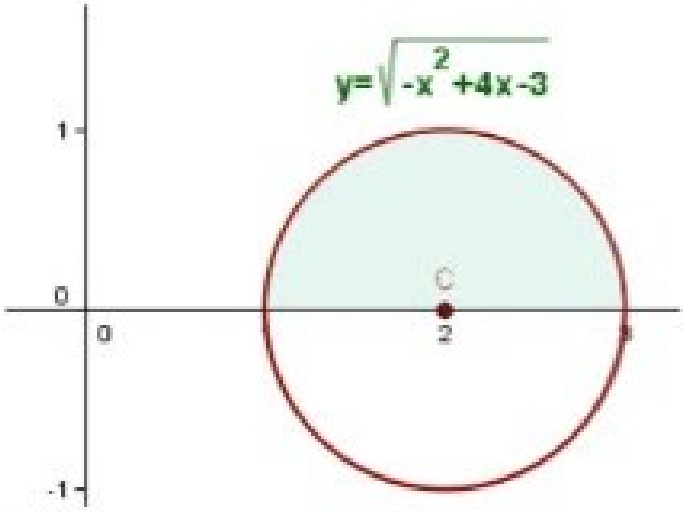
4. Hallar el volumen engendrado por el círculo $x^2 + y^2 - 4x = -3$ al girar alrededor del eje OX.

$$x^2-4x+4-4+y^2=-3$$

$$(x-2)^2+y^2=1$$

El centro de la circunferencia es C(2, 0) y el radio r = 1.
Puntos de corte con el eje OX:

$$\begin{cases}(x-2)^2+y^2=1\\ y=0\end{cases} \qquad (1,0) \quad (3,0)$$

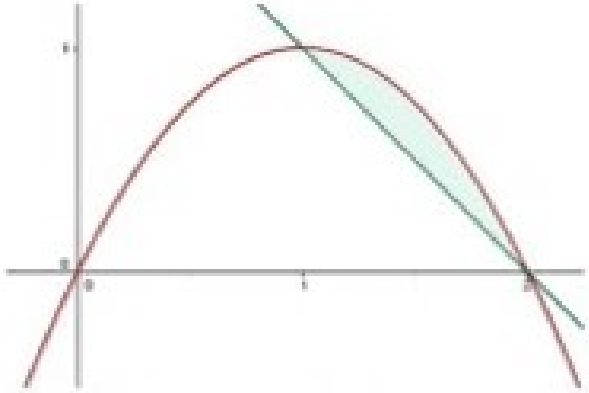


$$V = \pi\int_1^3\left(\sqrt{-x^2+4x-3}\right)^2 dx = \pi\int_1^3\left(-x^2+4x-3\right) dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3 = \frac{4\pi}{3}\ u^3$$

5. Calcular el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las gráficas de $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$.
Puntos de intersección entre la parábola y la recta:

$$\begin{cases}y=2x-x^2\\ y=-x+2\end{cases} \qquad 2x-x^2=-x+2 \qquad (1,1) \quad (2,0)$$



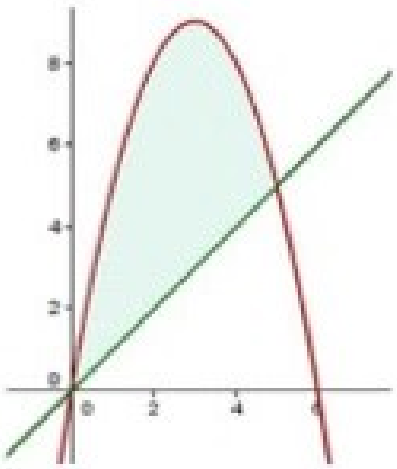
La parábola está por encima de la recta en el intervalo de integración.

$$V = \pi\int_1^2 \left[\left(2x - x^2\right)^2 - (-x+2)^2\right] dx = \pi\int_1^2 \left(x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4\right) dx =$$

$$= \pi\left[\frac{1}{5}x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x\right]_1^2 = \frac{\pi}{5}\,u^3$$

6. Calcular el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las gráficas de $y = 6x - x^2$, $y = x$.
Puntos de intersección:

$$\begin{cases} y = 6x - x^2 \\ y = x \end{cases} \qquad 6x - x^2 = x \qquad (0,0) \quad (5,5)$$



La parábola queda por encima de la recta en el intervalo de integración.

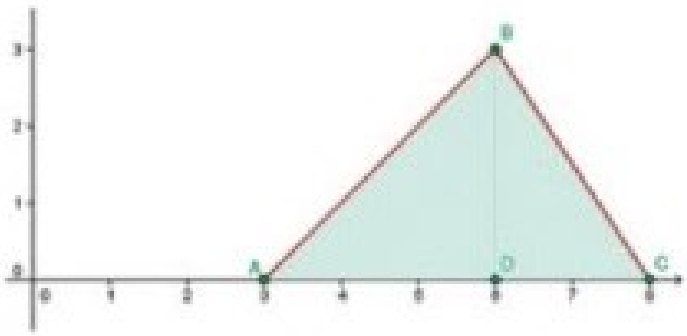
$$V = \pi\int_0^5 \left[\left(6x - x^2\right)^2 - x^2\right] dx = \pi\left[\frac{1}{5}x^5 - 3x^4 + \frac{35}{3}x^3\right]_0^5 = \frac{625\pi}{3}\,u^3$$

7. Calcular el volumen que engendra un triángulo de vértices A(3, 0), B(6, 3), C(8, 0) al girar 360° alrededor del eje OX.
Ecuación de la recta que pasa por AB:

$$\frac{x-3}{6-3}=\frac{y-0}{3-0} \qquad y=x-3$$

Ecuación de la recta que pasa por BC:

$$\frac{x-8}{6-8}=\frac{y-0}{3-0} \qquad y=-\frac{3}{2}(x-8)$$



$$V=\pi\int_3^6 (x-3)^2\,dx+\pi\int_6^8\left[-\frac{3}{2}(x-8)\right]^2\,dx=$$

$$=\pi\int_3^6\left(x^2-6x+9\right)dx+\pi\int_6^8\left[\frac{9}{4}\left(x^2-16x+64\right)\right]dx=$$

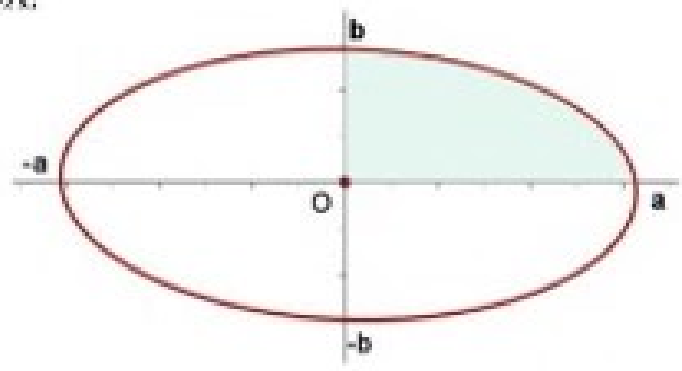
$$=\pi\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_3^6+\frac{9\pi}{4}\left[\frac{x^3}{3}-8x^2+64x\right]_6^8=$$

$$=\pi(72-108+54-9+27-27)+\frac{9\pi}{4}\left(\frac{512}{3}-512+512-72+288-384\right)=15\pi\ u^3$$

8. Hallar el volumen de la figura engendrada al girar la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

alrededor del eje OX.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

Por ser la elipse una curva simétrica, el volumen pedido es 2 en veces el volumen engendrado por el arco

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

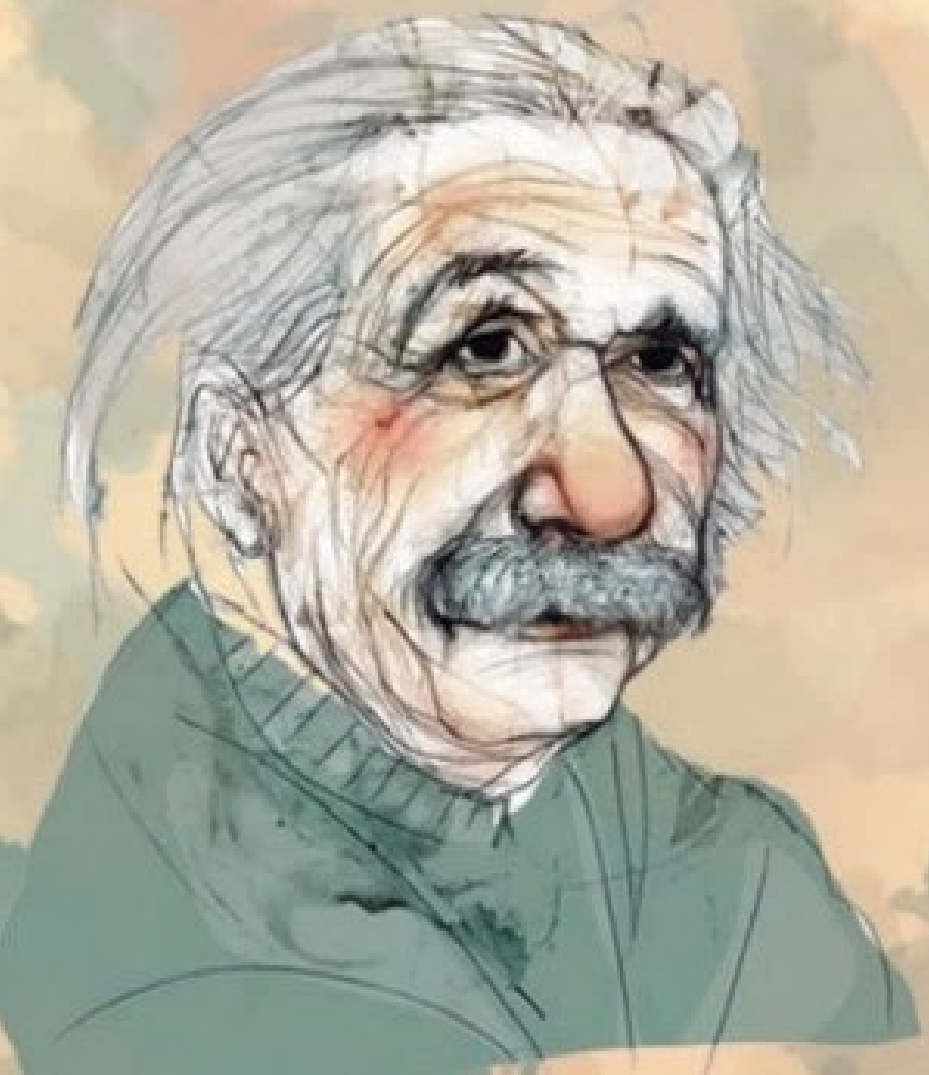
Entre x = 0 y x = a.

$$V = 2\pi\int_0^a \left[\frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)\right] dx = \frac{2b^2\pi}{a^2}\int_0^a \left(a^2 - x^2\right) dx =$$

$$= \frac{2b^2\pi}{a^2}\left[a^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a = \frac{2b^2\pi}{a^2}\left(a^3 - \frac{1}{3}a^3\right) = \frac{4}{3}ab^2\pi$$

CAPÍTULO IX

DESAFÍOS Y CURIOSIDADES ACERTIJOS Y DIVERSIONES



CAPÍTULO IX

DESAFÍOS Y CURIOSIDADES, ACERTIJOS Y DIVERSIONES

DIVERSIONES PARA NO ABURRIRSE

Antes de empezar con este libro, me pregunté cómo terminaría. Elegí las diversiones, porque si el libro los aburrió, es justo que los compense con algo más divertido.

A continuación, algunas curiosidades, acertijos, desafíos y diversiones que he seleccionado.

Curiosidades

Estas operaciones matemáticas que presentaré a continuación son muy vistosas, no sólo por la forma que toman en sus resoluciones sucesivas, sino por las características de los operandos y los llamativos resultados.

Curiosidades de Brandreth con sumas y productos:

$$
\begin{aligned}
1 \times 8+1 &= 9 \\
12 \times 8+2 &= 98 \\
123 \times 8+3 &= 987 \\
1234 \times 8+4 &= 9876 \\
12345 \times 8+5 &= 98765 \\
123456 \times 8+6 &= 987654 \\
1234567 \times 8+7 &= 9876543 \\
12345678 \times 8+8 &= 98765432 \\
123456789 \times 8+9 &= 987654321
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
9 \times 9+7 &= 88 \\
98 \times 9+6 &= 888 \\
987 \times 9+5 &= 8888 \\
9876 \times 9+4 &= 88888 \\
98765 \times 9+3 &= 888888 \\
987654 \times 9+2 &= 8888888 \\
9876543 \times 9+1 &= 88888888 \\
98765432 \times 9+0 &= 888888888
\end{aligned}
$$

123456789 × 9 = 111111111
123456789 × 18 = 222222222
123456789 × 27 = 333333333
123456789 × 36 = 444444444
123456789 × 45 = 555555555
123456789 × 54 = 666666666
123456789 × 63 = 777777777
123456789 × 72 = 888888888
123456789 × 81 = 999999999

(Los multiplicandos son múltiplos de nueve)

Datos curiosos

1.- El cero se descubrió en la India y se trasladó a Europa por medio de los árabes. Cero proviene de la palabra árabe "sifr", que significa "vacía".

2.- Si multiplicamos 111111111 x 111111111 el resultado es 12345678987654321.

3.- El número más curioso es el 142857, si lo multiplicamos por 7 el resultado es 999999. Además, si lo multiplicamos por 1, 2, 3, 4, 5, 6 nos dará como resultado la misma serie de números en distinto orden.
3 X 142857 = 428571
5 X 142857 = 714285

4.- Robert Recode, médico inglés y matemático, fue el creador del símbolo = (igual), simbolizando dos líneas rectas paralelas, las dos cosas más iguales para Robert Recode.

5.- En una partida de cartas el número correcto de barajar es el 7, ya que barajando los naipes este número de veces consigues que la distribución sea aleatoria dentro de una baraja de 52 cartas. A no ser que juegues al póker online que entonces lo realizará el ordenador.

6.- Todos los relojes de anuncios marcan las 10:08 o 10:10, el motivo es que, al dibujar un rectángulo con el límite del minutero, se crearía un **rectángulo áureo**. Y se ha demostrado que las proporciones áureas se consideran agradables a la vista.

7.- El número pi lleva el símbolo π, que es una letra griega que correspondería en su traducción a nuestra letra p.

8.- La martingala es una forma matemática de apostar en la ruleta. Consiste en multiplicar sucesivamenre la apuesra inicial en caso de pérdida hasta ganar una vez, el problema es que es imposible ganar a la banca porque esta tiene una solvencia infinita.

9.- El número 153 es el número más pequeño en ser expresado como la suma de los cubos de sus dígitos.

10.- Para sumar las caras ocultas de los dados solo hay que restarle a 21 el número que marca el primer dado de la torre.

Fuente: Wikipedia | top10curiosidades.com

Acertijos matemáticos engañosos

Lo dijo Martin Gadner en su libro *Matemática para divertirse*, de donde provienen estos acertijos: "Los veintisiete acertijos de esta sección son cortos y fáciles, pero cada uno de ellos implica alguna clase de truco que da a la respuesta un giro inesperado. De alguna manera, podríamos llamarlos problemas humorísticos o graciosos, pero he preferido terminar el libro con ellos por una razón muy especial. La razón es esta: un matemático o científico creativo debe tener una mente constantemente en guardia, que no se deje sorprender por facetas inesperadas. Einstein, por ejemplo, el mayor científico de épocas recientes, jamás habría desarrollado su famosa teoría de la relatividad si no hubiera cuestionado ciertas suposiciones que ningún otro científico se había atrevido a cuestionar durante siglos. Resolvió problemas que parecían no tener solución y los resolvió descubriendo el elemento "sorprendente", ese extraño factor oculto que todo el mundo había pasado por alto. A veces el nuevo giro es tan simple que, una vez descubierto, otros científicos se preguntan cómo no se les había ocurrido a ellos. No se les ocurrió, sin duda, porque sus mentes estaban encadenadas por el hábito a las maneras de pensar familiares y ortodoxas."

Así que, a aguzar el ingenio y a poner las neuronas en alerta, que sus cerebros ahora tienen una divertida tarea. No son de gran importancia matemática... pero les enseñarán que, en matemática, como en la vida, las cosas no son siempre lo que parecen.

Acertijos engañosos

1.- ¿Puedes poner diez terrones de azúcar en tres tazas vacías de modo que en cada taza haya un número impar de terrones?

2.- En la ferretería local, Jones se enteró que 1 le costaría 50 centavos, 12 le costarían $1,00 y que el precio de 144 era $1,50. ¿Qué era lo que Jones estaba comprando?

3.- Observa con cuánta rapidez puedes anotar los dígitos de 9 a 1 de atrás para adelante, luego controla la respuesta para ver si has seguido bien las instrucciones.

4.- ¿Con cuánta rapidez puedes hallar el producto de los siguientes números?
256 x 3 x 45 x 3.961 x 77 x 488 x 2.809 x 0

5.- Laringitis, un orador griego, nació el 4 de julio del 30 A. C. Murió el 4 de julio del año 30 D. C. ¿Qué edad tenia cuando murió?

6.- Juntos perro y gato pesan 15 kilos. Si el peso del can es un número impar, y si el macho pesa el doble que la hembra, ¿cuánto pesa cada uno?

7.- Después de una serie de experimentos, un químico descubrió que una determinada reacción química demoraba 80 minutos en producirse siempre que él usaba una corbata verde, y que la misma reacción demoraba una hora y veinte cuando él usaba una corbata roja. ¿Se te ocurre alguna razón para ello?

8.- Un matemático se fue a acostar a las ocho de la noche, puso el despertador para las 9 de la mañana y se fue a dormir de inmediato. ¿Cuántas horas había dormido cuando el despertador lo despertó?

9.- Divide 30 por 1/2 y suma 10. ¿Cuál es el resultado?

10.- Un chico tenía cinco manzanas y se comió todas salvo tres. ¿Cuántas manzanas quedaron?

11.- ¿Cuáles dos números enteros (no fracciones) dan el número de la mala suerte, 13, cuando son multiplicados entre sí?

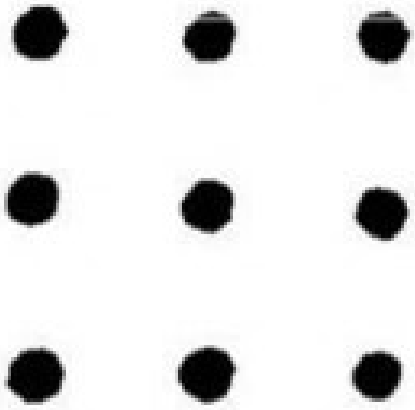
12.- Un lector de este libro estaba tan enojado por no poder hallar las respuestas de todos estos problemas que arrancó las páginas 6, 7, 84, 111 y 112. ¿Cuántas hojas arrancó en total?

13.- Si un reloj tarda cinco segundos en dar las 6, ¿cuánto tiempo le llevará dar las 12?

14.- Un triángulo tiene lados de 17, 35 y 52 centímetros. ¿Cuál es su superficie en centímetros cuadrados?

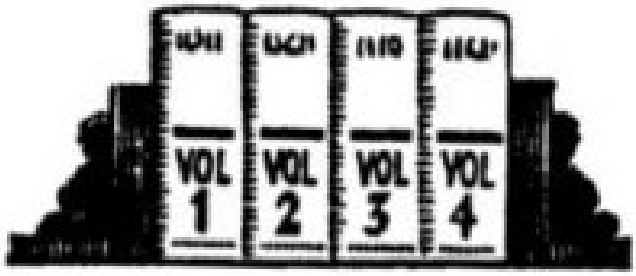
15.- ¿Puedes trazar cuatro líneas rectas, sin levantar la punta del lápiz del papel, que pasen por los nueve puntos de la ilustración?

ArquiMática

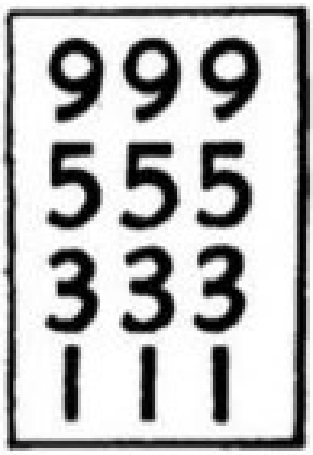


16.- ¿Puedes trazar dos líneas rectas, sin levantar el lápiz del papel, que pasen por las seis pelotas de béisbol que aparecen en la ilustración?

17.- Cada libro de los que se ven en la ilustración tiene cinco centímetros de grosor. Esa medida incluye las tapas, que tienen un grosor de 1/4 de centímetro. Si una polilla que come papeles empieza por la primera página del volumen 1 y se abre camino hasta la última página del volumen 4, ¿qué distancia habrá recorrido?



18.- Elegir seis dígitos de los que se ven en la ilustración que sumados den 21.



19.- Demuestra de qué manera se puede cortar un panqueque en ocho partes con tres cortes rectos de cuchillo.

20.- Un insecto se arrastra a lo largo de una regla desde la marca de los 10 centímetros de un extremo hasta la marca de los 5 centímetros que está en el centro. Ese trayecto le lleva 10 segundos. Siguiendo su camino, se desplaza desde la marca de los 5 centímetros hasta la marca de 1 centímetro, pero ese recorrido le lleva solamente ocho segundos. ¿Se te ocurre alguna buena razón que justifique esa diferencia de tiempo?

21.- ¿En qué se basa el orden en que se han dispuesto estos diez dígitos?
0-5-4-2-9-8-6-7-3-1

22.- Si hay doce estampillas de un centavo en una docena, ¿cuántas estampillas de dos centavos habrá en una docena?

23.- Coloca una moneda en cada uno de los sitios que muestra la ilustración adjunta. ¿Puedes cambiar la posición de sólo una moneda y formar dos filas rectas que contengan cuatro monedas cada una?

24.- Un señor lógico se encontró en una pequeña ciudad que sólo tenía dos peluqueros, cada uno de ellos con su propia peluquería. Como necesitaba un corte de pelo, miró hacia el interior de una de las peluquerías y vio de inmediato que era extremadamente sucia. El mismo peluquero necesitaba una afeitada, sus ropas estaban sucias, su pelo descuidado y mal cortado. La otra peluquería resultó ser impecable. El barbero estaba recién afeitado, impecablemente vestido y tenía el pelo prolijamente cortado. El lógico pensó un momento y luego regresó a la primera peluquería para hacerse cortar el pelo. ¿Por qué?

25.- Cuando los dos desconocidos, con los que se habían citado a ciegas, llegaron para llevarlas a un partido de fútbol, Katy y Susan quedaron atónitas al ver que los dos jóvenes eran exactamente iguales. "Sí, somos hermanos", explicó uno de ellos. "Nacimos el mismo día del mismo año y tenemos los mismos padres". "Pero no

somos mellizos", dijo el otro. Katy y Susan quedaron perplejas. ¿Puedes explicar la situación?

26.- Multiplicar 10 metros por 10 metros da 100 metros cuadrados. ¿Cuánto da diez dólares por diez dólares?

27.- Cuando el joven pagó su desayuno a la cajera, ella advirtió que él había dibujado un triángulo en el reverso de la cuenta. Debajo del triángulo había anotado:
13 x 2 = 26.
La cajera sonrió: "Veo que eres marinero", dijo.
¿Cómo supo la cajera que el joven era marinero?

(Fuente: Martin Gadner, Matemática para divertirse)

¿Será posible?

- Si es posible, encontrar la solución.
- Si no lo es, explicar por qué.

Tenemos que transportar con un burro 900 zanahorias a un mercado, que está a 300 km de distancia de donde nos encontramos.
El burro puede transportar como máximo 300 zanahorias y, además, necesita comer una zanahoria por cada kilómetro que recorre. Si no lleva zanahorias para comer se detiene y no sigue caminando.
¿Cuál es el mayor número de zanahorias que conseguiremos transportar hasta el mercado?"

(Fuente: https://matematicascercanas.com/2015/10/21/el-burro-y-las-zanahorias/)"

Juegos curiosos

1. El veneno: Hay 10 palos y dos jugadores. Cada jugador puede ir cogiendo los palos de uno en uno o de dos en dos. Se va haciendo así hasta que sólo quede uno. Al que le toque coger el último deberá beber un veneno, mientras que el otro quedará libre. ¿Se te ocurre alguna manera de ganar todas las veces?

2. Encontrar el litro: Pablo tiene una garrafa donde caben 3 litros de agua y otra donde caben 5 litros. ¿Cómo puede medir un litro con esos recipientes?

3. Se busca un número: Descubre un número de 6 cifras:
   - *No tiene ceros.*
   - *La cifra de las D es el primer número par exceptuando el cero.*

- *La cifra de las UM es la unidad.*
- *La cifra de las CM es el doble que la cifra de las D.*
- *La cifra de las centenas es la mitad que la de las CM.*
- *El número de las U es el mismo que el de la C más uno.*
- *El número de las DM es el mismo que el producto de la cifra de las D por la cifra de las U.*

4. Los dados: Juan le dice a Ana que adivine el número en el que está pensando, teniendo en cuenta que se trata del mayor número que se puede formar con las cifras de seis dados lanzados a la vez. ¿Puedes ayudarle?

5. Las bolas: Un hombre tenía dos prisioneras, Ana y Raquel, a las que propuso el siguiente trato: Aquí tenéis tres bolas rojas que parecen iguales, pero una es diferente. También os doy una balanza. Daré la libertad a la que consiga averiguar la bola que tiene un peso diferente en un menor número de pesadas.
Raquel lo averiguó a la primera y recobró su libertad. ¿Cómo lo hizo?

Respuestas

1. El veneno: Ganará el que tome los números que se multiplican por 3 (3, 6, 9). La clave es el 9. Si no saben la clave, no importa que empiece uno u otro. Si se sabe, pierde el que empieza.

2. Encontrar el litro: Llena la garrafa de 3 litros y la vacía en la de 5. Vuelve a llenar la de 3 litros y echa toda el agua que quepa en la de 5. Como 3+2=5, en la garrafa de 3 litros quedará ya un solo litro de agua.

3. Se busca un número: Es el 461223

4. Los dados: El número 666.666

5. Las bolas: Se colocan dos bolas en una balanza, puede ocurrir que: a) la balanza se quede equilibrada, con lo que se sabe que la bola que no se ha pesado es la que pesa diferente. b) Que la balanza quede desequilibrada. En este caso se retira una de las dos bolas y se pesa la tercera. Si estas dos bolas quedan equilibradas, la bola que se ha retirado es la que pesaba diferente. Si se quedan desequilibradas, la que quedaba de antes en la balanza es la que pesaba distinto. A Alí la balanza le quedó equilibrada en la primera pesada, por lo que no tuvo que hacer la segunda pesada.

Adivinar la edad de una persona

Se empieza por calcular la diferencia entre la edad de la persona y la de usted:

1.- Si la persona es de más edad que la de usted:
- Al número 100 réstele su edad.

- Pídale a la persona que agregue a la edad que ella tenga, el número que expresa dicha resta.
- La suma que ella hallará es un número evidentemente superior, o igual a cien. Haga eliminar de ese número la cifra de las unidades de cien.
- La suma obtenida, que usted solicitará diga la persona, es la diferencia de las dos edades. Agregará usted, pues, esa diferencia a su edad, y tendrá así la de la persona.
- Así, por ejemplo, sea su edad $A = 19$ años y la de la persona cuya edad se propone adivinar, $B = 46$. Usted resta mentalmente 19 de 100 y obtiene 81.
- Usted hace agregar 81 a 46, lo que da 127.
- Luego hace usted eliminar la cifra 1 de las centenas de 126, lo que da 27, que es la diferencia de las edades: $B - A = 46 - 19 = 27$.
- El resultado obtenido se explica fácilmente, en efecto: usted empezó por restar a 100 su edad, obteniendo $100 - A$, diferencia que hizo agregar a la edad de la persona, obteniendo $B + 100 - A$.

De este número usted hizo eliminar la cifra de las centenas, o sea, restó 100, es decir, que restó 100; quedando $(B + 100 - A) - 100 = B - A$.

2.- *Si la persona es de menos edad que la de usted*, se procede como antes hasta la segunda faz de la operación; luego, como la suma que se obtiene no llega a 100, usted hace agregar a ella un número ficticio a fin de encontrar una suma mayor que 100.
Se continúa como en el caso anterior, y la suma que le dirá la persona la restará usted de aquel número ficticio, siendo el resultado la diferencia de las dos edades. Así, por ejemplo, si su edad es $A = 29$ años y la de la persona $B = 23$, la diferencia de su edad con 100 es 71, que hace agregar a 23, obteniendo 94.

Luego hace agregar un número ficticio, por ejemplo 30, obteniendo 124; se elimina la cifra 1 de las centenas, obteniendo 24; la diferencia de edades es $30 - 24 = 6$.

Este resultado se explica en forma análoga al anterior; en efecto, con las mismas notaciones, y llamando N al número ficticio empleado en el juego, sus fases son las siguientes:

$$N - [(B + 99 - A + N) - 99] = N - (B - A + N) = A - B$$

(Fuente: www.librosmaravillosos.com/hombrecalculaba/capitulo37.html)

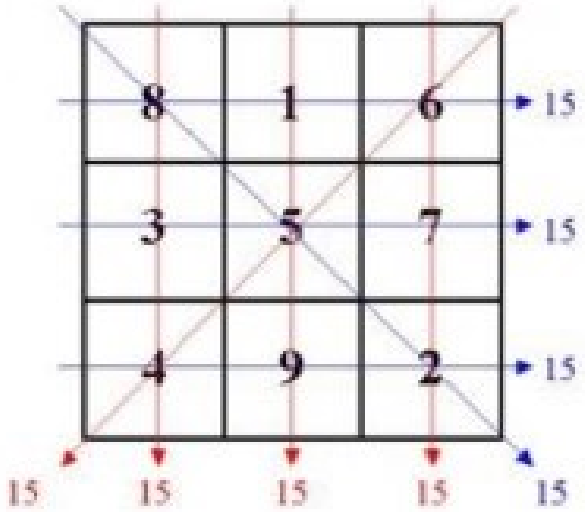
Cuadrados mágicos

A continuación, un entretenido ejercicio que se puede realizar a todos los niveles modificando su complejidad: los cuadrados mágicos.

Los cuadrados mágicos son tablas, o, mejor dicho, cuadrículas con números enteros de tal forma que la suma de las cifras de las filas y las columnas, así como la suma de la diagonal principal sea siempre la misma cantidad, denominada constante mágica.

No obstante, no es obligatorio que siempre se trabaje con números enteros, en cursos superiores se podría trabajar también con números racionales o incluso decimales, añadiendo de esta manera un alto grado de dificultad.

Ejemplo: Aquí podéis ver un ejemplo de cuadrado mágico, donde tanto sus filas, como columnas y las diagonales principales suman 15.

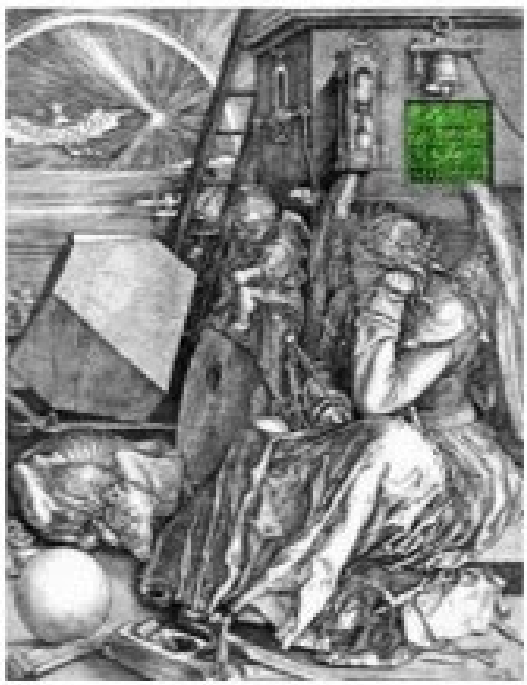


Evidentemente, en un cuadrado mágico siempre faltan varios números. Los números que se utilizan para rellenar las casillas suelen ser números consecutivos, empezando por el 1 hasta el cuadrado del número de filas y columnas que tenga el cuadrado mágico.

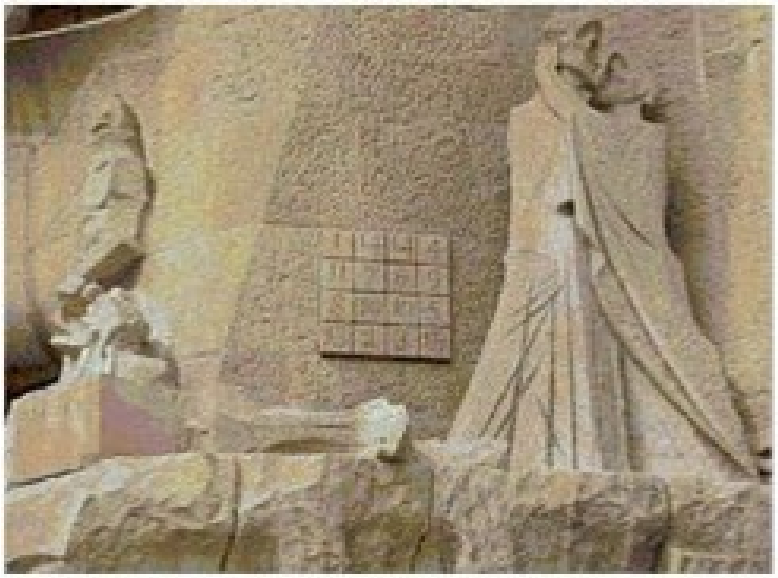
La única utilidad de estos cuadrados mágicos es una forma de entretenimiento, como bien han demostrado los sudokus, que tan famosos se volvieron tanto en juegos de móviles como en revistas de pasatiempos. No obstante, sirven para desarrollar el pensamiento matemático, además destacan en el campo de la magia. Y también en el arte, como se puede apreciar en el cuadro de Alberto Durero "*Melancolía*", del año 1514, donde se encuentra señalado en verde el cuadrado mágico de orden cuatro.

Ampliamos el cuadrado que sale en esta obra de arte para poder apreciar sus números, y vemos que tiene como constante mágica el número 34.

(Fuente: matematica.laguia2000.com/general/cuadrados-magicos)



También merece que se mencione el cuadrado mágico de orden 4 que podemos encontrar en el *Templo Expiatorio de la Sagrada Familia en Barcelona*, donde el escultor Josep María Subirachs plasmó un cuadrado mágico de orden 4 cuya constante mágica es el número 33, la edad en la que murió Nuestro Señor Jesucristo.



Algo de historia

Ya en el III milenio antes de Cristo los cuadrados mágicos eran conocidos en la antigua China. Según cuenta una leyenda, cierto día se desbordó un río. Para calmar la ira del dios del río, la gente le hizo ofrendas, pero lo único que ocurría tras las ofrendas era la aparición de una tortuga que rondaba la ofrenda sin aceptarla. Finalmente, un chico se dio cuenta de la marca que tenía la tortuga en su caparazón, de modo que incluyeron en la ofrenda la cantidad pedida por la tortuga, 15, y las aguas por fin volvieron a su cauce.

Al igual que en la antigua China, también se conocen combinaciones de esta clase en los indios, egipcios, árabes y griegos. En muchas de estas culturas, los cuadrados mágicos se creen que tienen propiedades astrológicas y adivinatorias, siendo un grabado común en talismanes.

Su llegada a occidente fue alrededor del siglo XIV, gracias a Emanuel Moschopoulos, ya que fue el autor de un manuscrito en el que explica cómo se pueden construir estos cuadrados. Posteriormente, el estudio de sus propiedades desde el punto de vista científico atrajo la atención de grandes matemáticos, entre los que destacan Fermat, Pascal, Leibnitz, Euler..., entre otros.

(matematica.laguia2000.com/general/cuadrados-mágicos)

EL FIN DE LA HISTORIA QUE NO TIENE FINAL

Y como no podía ser de otra manera, este libro termina como empezó: con una historia. La historia que nunca ocurrió ni ocurrirá, pero tan factible como que el lector de este libro crea que sí ocurrió o que ocurrirá en tiempos futuros.

Siempre creímos (porque así nos hicieron creer) que los sabios, los genios, los destacados de todas las disciplinas, los héroes y todos los grandes no discutían ni combatían entre ellos. Pero el caso es que estábamos totalmente equivocados. Y acá tenemos la evidencia: resulta que un hacker, de esos que nunca faltan, se inmiscuyó en el grupo de WhatsApp denominado GENIUS, y pudo subir a Internet la conversación en conferencia y transcribió algunas "intimidades" de este grupo, a través de la siguiente discusión:

G. W. Leibniz
—¡Buen día, grupo!!

IsaacN
—¡Buen día para ti!!

R. Hooke
—¡Qué mala onda, Newty!!! ¿Todavía no cayó la manzana en tu jardín?

IsaacN
— Y tú, Robert, al igual que el germano, te dedicas a copiar y a plagiar todas mis creaciones.

G. W. Leibniz
—¿De qué estás hablando, Isaac?

IsaacN
—No te hagas el distraído, que sabes bien que me refiero a mi creación del método de las fluxiones para el análisis matemático.

G. W. Leibniz
—El método de las fluxiones te pertenece, Isaac, pero el método para el análisis matemático es mío y tú mismo lo reconociste en la última publicación.

R. Hooke
—Es verdad lo que dice Leibnitz. Yo mismo lo leí.

IsaacN
—Y tú no te metas, Robert, que le informaste a la Royal Society que mi teoría acerca de que la luz es un fenómeno resultante de la emisión de corpúsculos luminosos por parte de determinados cuerpos es falsa.

R. Hooke
—¡Claro que es falsa! ¡La luz es un fenómeno ondulatorio!!!

G. W. Leibniz
—¡Coincido con Hooke!! ¡La luz es un fenómeno ondulatorio!!!

IsaacN
—¡Ustedes de óptica no saben nada!!!! ¡Dios los cría, el viento los amontona!!! ¡Publicaré mi gran obra a la muerte de ustedes dos y no los mencionaré!!!

G. W. Leibniz
—Deberías seguir con la matemática, Isaac, el binomio que lleva tu nombre te salió bien. Déjale la física a Hooke y el análisis a mí. Sabemos más que tú.

IsaacN
—¡Lo que ustedes saben lo aprendieron de mí!! ¡Seré el emperador de la física y el padre creador del cálculo infinitesimal!! Ustedes al olvido.

ArquimDeSira
—¡Calma, jóvenes!!! ¿Porqué tanta acritud?

ArquimDeSira
—¿Qué pasa que nadie responde??? Para lograr el valor aproximado del número pi, tuve que utilizar los infinitesimales de forma similar al moderno cálculo integral. ¡De manera que el padre creador del cálculo infinitesimal soy yo!! Así que Isaac y Gottfried, ¡dejen de pelear!!!

R. Hooke
—¡Tiene razón Arquímedes!!! Parecen dos vecinas camorreras.

IsaacN
—¡Y tú también, Robert! ¡Que la física no te va, dedícate a otra cosa!!!

G. W. Leibniz
—Sí, Robert, dedícate a otra cosa. Deja la física para los que sabemos.

R. Hooke

—¿Y tú qué sabes?? ¡¡Te pasas con disquisiciones filosóficas que no sirven para nada!!! Dices que la verdad del conocimiento está en su necesidad intrínseca y no en su adecuación con la realidad: ¡Eres más complicado que las mujeres!!!!

G. W. Leibniz

—No escribo para cualquiera, soy la mayor expresión del racionalismo filosófico y debes saber, Robert, que el modelo de esa necesidad lo proporcionan las verdades analíticas de las matemáticas.

ArquimDeSira

—¡Calma, jóvenes!!! ¿Porqué tanta pelea en este trinomio? Nadie me contestó por qué se arrogan el cálculo infinitesimal que me pertenece.

G. W. Leibniz

—Tú utilizaste el método exhaustivo para lograr el valor aproximado del número pi y resolviste problemas mediante aproximaciones con determinado grado de precisión, especificando los límites entre los cuales se encontraba la respuesta correcta. Pero jamás desarrollaste el cálculo infinitesimal con la precisión que lo hice yo. Además, soy el creador del diferencial y de la notación del análisis: ¡el verdadero creador del análisis matemático soy yo!!!

IsaacN

—Mentira. ¡¡ ¡Soy yo!!!

G. W. Leibniz

—¡Yo!!! Tú me copiaste y ya lo reconociste.

IsaacN

—Mentira. ¡¡Tú me copiaste a mí!!!

ArquimDeSira

—¡Tranquilos, jóvenes!! ¿Podría alguno de ustedes responderme a un problema infinitesimal?

G. W. Leibniz

—¡Yo!!!

IsaacN

—¡Yo primero!!! ¿Cuál es el problema?

ArquimDeSira

—¿Puede un área finita estar limitada por un perímetro infinito?

IsaacN
—¡Imposible!!! ¿Cómo se te ocurre preguntarme algo así?

G. W. Leibniz
—¡Absurdo!!! La respuesta es: imposible.

ArquimDeSira
—Entonces me explicarán por qué en el copo de Koch, cuando las iteraciones tienden al infinito, el área tiende a un valor determinado, mientras que el perímetro que lo encierra tiende al Infinito.

G. W. Leibniz
—¿De qué estás hablando, Arquím??? ¡Comenzaste a delirar!!!

IsaacN
—¡No te entiendo, viejo!!! ¡Estás chapita!!¿Qué es el copo de Koch??

ArquimDeSira
—¡Viejos los trapos!!!! ¡El delirante eres tú, teutón de cabellera ridícula!! ¡Robert tiene razón, tus delirios filosóficos no sirven para nada!!!

R. Hooke
—¡Ja, ja, ja, ja!!! No sólo el teutón es ridículo, también el de Woolsthorpe. Ambos con largas cabelleras con bucles: más coquetos que mujeres… ¡Ja, ja, ja, ja!!!

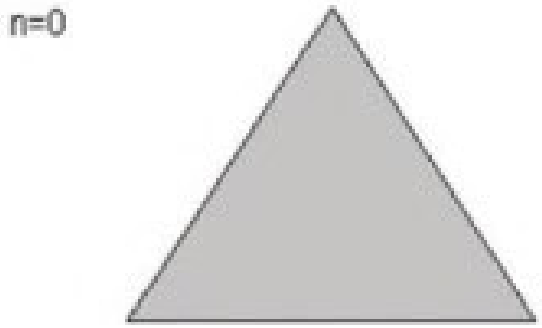
IsaacN
—¡Ja, ja, ja, ja!!! ¡Muchas risas, pero el ridículo es Robert!!! ¡Como no le dan bien las ciencias, ahora incursionó en la arquitectura!!!! ¡Como arquitecto es un gran físico!!!! ¡Ja, ja, ja, ja!!! Robert, dedícate a tareas domésticas.

G. W. Leibniz
—Eso, Isaac, que se dedique a tareas domésticas y que se olvide de nuestras cabelleras con bucles.

R. Hooke
—Este grupo está perdiendo seriedad. Arquím, ¿qué es el copo de Koch? También yo me quedé con la intriga.

ArquimDeSira
—Ahora les explico:
Partamos de un triángulo equilátero de lado unidad. Dividimos en tres partes iguales de longitud 1/3 cada lado. Sustituimos el segmento central por dos segmentos de tamaño idéntico formando un diente como podéis imaginar en la iteración n=1. Tenemos una curva poligonal P_1 de longitud $3 \cdot 4 \cdot 1/3 = 4$. Repetimos la operación (n=2) con cada uno de los cuatro nuevos segmentos de cada uno de los "lados". Obtendremos así la curva

P_2 de longitud $3 \cdot 4^2 \cdot 1/3^2 = 16/3$. La iteración indefinida nos proporciona la isla de Koch o copo de nieve de Koch.



En la operación n-ésima la curva estará formada por $3 \cdot 4^n$ trozos, de perímetro $4^n/3^{n-1}$. La curva de Von Koch resulta del paso al límite de la sucesión de curvas P_n cuando n tiende a infinito. ¿Cuál es la longitud del perímetro de esta isla?

Será:

$$P_\infty = \lim_{n \to \infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \infty$$

Es decir, aunque la isla de Von Koch ocupa una región limitada del espacio, un área finita, su perímetro es... ¡infinito!

IsaacN

—¡Facilísimo!!! Ahora no tengo tiempo, creo que la manzana está por caer y no puedo perderme este espectáculo que me hará famoso. Hasta luego, grupo.

G. W. Leibniz

—¡¡Realmente sencillo!!!! Tampoco yo tengo tiempo de distraerme en problemas menores. Se me acaba de ocurrir una idea, la invención de una máquina de calcular capaz de realizar las operaciones de multiplicación, división y hasta la extracción de raíces cuadradas. Hasta luego, grupo.

R. Hooke

—Con el pretexto de la manzana y de la maquinita, estos coquetos se sacaron el problema de encima. Arquím, ¿cuál es la solución?

ArquimDeSira

—No te la diré, porque la leerán los coquetos presumidos. Para más información, puedes consultar la primera curva exótica del capítulo VII de este libro.

L.Euler

—¡Bon jour a tous!!!!

R. Hooke

—Apareció el Helvético. Leo, no saludes en francés. A los ingleses no nos gusta. Tú eres suizo.

L.Euler

—¡Buon giorno a tutti!!!!

R. Hooke

—Leo, quiero decir que saludes en inglés o en castellano (preferentemente inglés, pero mejor en castellano, que este libro originalmente está en este idioma). Seguramente luego será traducido a otras lenguas, el primer traductor será el ingeniero Jaime de la UCB – Tarija, que hará la traducción al inglés. Los lectores de todas partes querrán leer este libro, no para aprender matemática que no les interesa, sino para divertirse con nosotros.

L.Euler

—¡¡Buen día a todos!! ¿Qué pasa que hay tanto alboroto, gente linda??

ArquimDeSira

— Leo, creo que te equivocaste de grupo. Pero si no te equivocaste, ya sabrás que tus amigos "infinitesimales" evitaron resolver el problema del Copo de Koch con el pretexto de la manzana y de la calculadora. ¿Podrías echarles una mano?

L.Euler

—¡Amigos tuyos! Eso te pasa por preguntarles a los aprendices de matemática. Debes consultar a quién sabe.

R. Hooke

—Leo, tú sabes menos que ellos y obviamente menos que yo.

L.Euler

—Estos ingleses son todos soberbios. Ya que sabes tanto, ¿por qué no resuelves el problema que planteó Arquím?

R. Hooke

—Porque es demasiado fácil.

L.Euler

—¡Tan fácil que ya le pediste la solución a Arquim!!! Y no te la dio. ¡Ja, ja, ja!!! ¡Grande el viejo!!!! Antes se divertía con el Visir de obtusa vestimenta, montado sobre un pícaro dromedario trucho, ahora se divierte con nosotros. Pero te encontraste con la horma de tu zapato. Si eres tan genio viejo, me demostrarás lo siguiente…

ArquimDeSira

—Momentito, no vaya tan rápido mi amigo. ¡Lo de viejo está de más!!! ¡Viejos tus abuelos!!! Además, te recordaré que estoy de vuelta cuando tú recién estás de ida. La

demostración que solicitas es la que te pidió ese ruso, que no recuerdo cómo se llama, la creíste fácil y trivial, y ahora te quita el sueño y seguramente te irás a la tumba sin demostrarla. ¿Quieres que te eche una mano???

L. Euler

—Sí, Arquím, es verdad. Pude resolver acertijos, problemas de los más complicados y hasta inventé la ecuación y la recta y enuncié la teoría, pero este enunciado no lo pude demostrar. Soy el matemático más grande de la historia, y Christian Goldbach, que así se llama este rusito, vino a quitarme el invicto.

Napoleón

—¿Qué les pasa a las cotorras de este grupo? Permanentemente me suena el LG y son los mensajes de ustedes. No me dejan concentrar, debo enunciar mi tercer teorema y así seré recordado como el más grande.

R. Hooke

—¡Apareció el corso!! ¡Después de Waterloo, debieras llamarte a silencio Napo y dejar que Leo nos cuente el problema que lo tiene entrampado!

Napoleón

—¡Con los ingleses no hablo!!! Leo, ¿¿de qué ecuación, de qué recta y de qué teoría hablás???? ¿Por qué no me cuentas el problema que te tiene atascado??

R. Hooke

—Napo, está hablando de la ecuación de Euler, la recta de Euler y la teoría de Euler. Y el que lo tiene atascado es ese rusito que nació en ese país que te hizo entender que con el señor Invierno no se juega. ¡Ja, ja, ja!!!

Napoleón

—Ya te dije, ¡con los ingleses no hablo!!! Leo, qué bien lo de la recta que une los puntos notables del triángulo. Yo, por mi parte, ya enuncié los 2 teoremas que lógicamente se llamarán los teoremas de Napoleón y ahora estoy elaborando el tercero. Me parece que eres más egocéntrico que yo: le pones tu nombre a todo lo que haces. Y la ecuación de Euler, ¿vale también para los sólidos del viejo Arquim??? ¿Por qué no me cuentas el problema que te tiene atascado?? Yo lo resolveré.

ArquimDeSira

—¿Tú también, Napo?? Claro que la ecuación de Euler vale para los arquimedeanos, para eso los inventé, aparte de las grandes invenciones de la antigüedad. Ahora tendrás tu merecido: Leo, dile cuál es el problema que te tiene en vilo y nos divertiremos. Le irá peor que en Rusia y que en Waterloo. ¡Ja, ja, ja!!!

Napoleón

—¡Ja, ja, ja!!!¡Este viejo no sabe con quién se mete!!! Dale, Leo, ¿cuál es el problema? que estoy ansioso por demostrarle a Arquím que no solamente pude con Laplace y

Lagrange (a ambos les gané la discusión). También podré con este desafío. Luego de resuelto, le pediré al viejo que me explique cómo hará para mover el mundo y nos divertiremos a lo grande. ¡Ja, ja, ja!!!

L. Euler
—Ahí va: demostrar que "Todo número par positivo, mayor que dos, se puede escribir como la suma de dos números primos." ¡¡Suerte Napo!!!!

IsaacN
—¡Eureka, Eureka!!!! ¡Lo descubrí!!!

L. Euler
—¿Al problema del rusito o al problema del copo?

IsaacN
—A ninguno de los dos. No tengo tiempo para dedicarme a problemas sencillos. Estoy para otra cosa. ¡Descubrí la ley universal de gravitación!! Ahora, Eratóstenes podrá explicarle a Pitágoras por qué la gente no se cae, siendo la tierra redonda.

G. W. Leibniz
—¡¡Esa expresión no te pertenece, Newty!!!! Me copiaste el método del análisis matemático a mí y ahora le copiaste la expresión al viejo Arquím: eres poco original. Debieras ser como yo, tan original que acabo de inventar una máquina, la primera máquina de calcular capaz de realizar las operaciones de multiplicación, división y hasta la extracción de raíces cuadradas. La patentaré a mi nombre. No podrás apropiarte de esta genialidad.

IsaacN
—Y yo patentaré a mi nombre mi gran descubrimiento, así tú ni nadie podrá apropiarse de la ley universal de gravitación, ¡¡teutón apropiador!!!! ¡Ja, ja, ja!!!

R. Hooke
—¡Volvieron las melenudas camorreras!!! En vez de pelear y hacer el ridículo, ¿por qué no nos cuentan de sus invenciones que parecen interesantes?

ArquimDeSira
—Sí, Robert, tienes razón. Que dejen de hacer el ridículo y nos cuenten de sus invenciones. ¡¡La expresión "Eureka, Eureka" no te pertenece, Newty!!!! Me copiaste a mí ¡Celta copión!! ¡Ja, ja, ja!!!

IsaacN
—¡No me llames celta y menos copión!! Y tú ¿qué hablas de ridículo? si eres el más gracioso de todos. ¿No te acuerdas cuando corrías desnudo por las calles de Siracusa, gritando "*¡Eureka, Eureka!!*" cuando descubriste el principio de flotación? ¡Eres un viejo escandaloso!!!! ¡Ja, ja, ja!!!

G. W. Leibniz

—¡¡Sí, Newty!!!! Y luego nos llama ridículos a nosotros por nuestras bellas cabelleras. ¡Eres un viejo ridículo y envidioso, Arquím!

Descartes

—¡Bon jour a tous!!!! ¿Comment allez vous, cher group?

R. Hooke

—Ahora apareció el franchute. René, no saludes en francés. A los ingleses no nos gusta. Tú eres de La Haye, pero vives en Estocolmo.

Descartes

—¡A moi n´importe rien qu´est ce que vous pensez!!! Je pense, aprés j´exist en francais et c´est tout.

ArquimDeSira

—¡Se llenó la coclea!! Si algo faltaba era este franchute mala onda, parece Newty después de una mala noche. René, lo que quiere decir Robert es que saludes en castellano (que este libro está en este idioma). Que luego será traducido a otras lenguas, pero por ahora mejor en lengua hispana.

Napoleón

—Robert, ¿qué problema tenés con los franceses? René puede escribir y hablar en la lengua que quiera.

R.Hooke

—Napo, ¿no era que con los ingleses no hablabas? Ya lo leíste al viejo, por ahora mejor en lengua hispana, que este libro está en castellano. Parece que a tu amigo le hizo mal el frío sueco.

Descartes

—En Suecia mucho frío, es verdad. ¡Pero se compensa con la calidez de Cristina!! ¡Ahora sí, a pedido del viejo, y teniendo en cuenta que este libro está redactado en español, en esta lengua serán mis mensajes, de todas maneras, poco me interesa lo que les guste a los ingleses!!

Napoleón

—¡Así se habla René!!! Te damos la bienvenida.

ArquimDeSira

—¡Napo!! Quedaste en resolver el problema del rusito. ¿Cuál es la solución? Estás igual que tus amigos de "bellas cabelleras". Con las excusas de la manzana y de la maquinita evitaron el problema del sueco Koch. Y tú con la defensa nacionalista de Francia te hacés el distraído con el planteo del rusito. Si lo resuelves, te explicaré cómo mover el mundo. Como no lo resolverás, jamás sabrás cómo se mueve el planeta.

Descartes

—¡Se fueron por la tangente!! Los caballeros de largas y rizadas cabelleras quedaron en contarnos de sus invenciones.

IsaacN

—Aunque eres francés, te responderé, René. Y también a todos. Viendo caer esta mañana la manzana, en el jardín de mi casa, me di cuenta de que los cuerpos son atraídos por el planeta, por eso caen. Ahora enunciaré la ley universal de gravitación. ¡¡Seré el emperador de la Física!!!!

Descartes

—¡Entonces el planeta es atraído por la manzana!!

IsaacN

—Sí, René. Pero la cantidad de materia de la manzana es despreciable frente a la masa del planeta, por eso los cuerpos son atraídos por la tierra.

Descartes

—Entonces, ¿por qué la Luna no se cae?

IsaacN

—Porque la Luna está en movimiento, lo que le da el impulso necesario para generar la fuerza, que, compuesta con la fuerza de atracción gravitacional, da como resultante la fuerza tangencial que le da el movimiento orbital. La manzana que cae y la Luna que no cae, responden a la misma causa.

Descartes

—Inglesito, empiezo a respetarte. Lo que no entiendo es porqué la Luna se mueve sola.

IsaacN

—Por el principio de inercia. Y no me preguntes más, que ahora no tengo tiempo. Juntamente con la ley universal de gravitación enunciaré las tres grandes leyes de la física, que se llamarán por supuesto las leyes de Newton. Sin lugar a duda, soy el más grande de todos y de todos los tiempos.

G. W. Leibniz

—¡¡Sí, Newty!!!! Por ahora. ¡Se terminará tu reinado en la física! ¡Se terminará cuando Alemania vea nacer a su hijo dilecto que se llamará Albert en el siglo XIX!! ¡Ja, ja, ja!!!

Descartes

—Newty, eres el más soberbio de los ingleses que conocí. ¿Por qué 3 leyes? *¿Pourquoi toujour le numerò trois??* También yo puedo hacer un gran anuncio: la creación de la geometría analítica, la vinculación entre el álgebra y la geometría. Ahora se podrán hacer representaciones gráficas en un sistema de ejes perpendiculares, en un sistema que, por

supuesto, se llamará sistema cartesiano ortogonal, en honor a mí que soy su creador. ¡No sólo soy un gran matemático, *aussi je serais le filosopbe plus celebre de l'histoire!!!!!* ¡Ja, ja, ja!!!

G.W.Leibniz

—¡¡El filósofo más famoso de la historia seré yo!!!! El gran Leibniz. Sin lugar a duda, somos los alemanes los de la mejor estirpe: ¡los superiores!! ¡Ja, ja, ja!!!

ArquimDeSira

—¡Ja, ja, ja!!!¡Estoy maravillado con los modestos de este grupo!! Entre el Helvético que dice ser el matemático más grande de la historia, el inglesito que se proclamó emperador y ahora el franchute y el teutón que se baurizan los grandes y famosos filósofos de todos los tiempos, no queda lugar para la sencillez ni para la humildad.

A Newty y al teutón les recuerdo que todavía no dijeron nada del copo de Koch. A Napo y a Leo que no se hagan los distraídos y resuelvan el problema del rusito.

Ahora te tocó el turno franchute cartesiano, ¿podrás resolver el problema de la recta?

Descartes

—¡¡Bien sûr!!! Quel est le problème?

ArquimDeSira

—Toda recta que no pasa por el origen forma con los ejes ortogonales un triángulo rectángulo de área definida. Si conocemos el valor de esa área, ¿cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto (X_1Y_1)?

IsaacN

—¡Muy fácil, viejo!! A nosotros nos complicaste con ese maldito copo y al francesito le pedís este problemita.

G. W. Leibniz

—¡¡Sí, Newry!!!! A nosotros nos complicó con ese maldito copo y al francesito le pide lo más fácil. ¡Eres un Viejo tramposo, Arquim!

Descartes

—¡Très facil pour moi!!!!

R.Hooke

—Ahora reapareció el franchute. René, te dije que no escribas en francés, que a los ingleses no nos gusta.

Descartes

—¡A moi n´importe rien qu´est ce que vous pensez!!!

ArquimDeSira

—¡Menos peleas y más resolución!! Todavía están todos en deuda y por Tres.

Napoleón

—Robert, ¡No te metas con los franceses!!!!! Viejo, ¿podrías dejar de molestar con pequeñeces?

R.Hooke

—Napo, ¿no era que con los ingleses no hablabas? Ya lo leíste al viejo, menos pelea y más resolución.

Descartes

—Robert, ¡no te metas con Napo!!!

Napoleón

—¡Así se habla René!!! ¡A los inglesitos, lejos!!!

R. Hooke

—Viejo, ese problema tiene infinitas soluciones. Por un punto pasan infinitas rectas: ya te lo explicó tu maestro Euclides.

Napoleón

—Si, es verdad que por un punto pasan infinitas rectas. Pero tenemos el condicionante que encierra junto con los ejes, un área limitada. Tiene solución única.

L.Euler

—Coincido con Robert. Los cortes con los ejes son la abscisa y la ordenada al origen. Y el área del triángulo es el semiproducto de esos cortes. A medida que la recta gira alrededor del punto (X_1Y_1), al aumentar una, disminuye la otra, de manera que el semiproducto permanece constante y el problema tiene infinitas soluciones.

Pitágoras

—Leo, no seas atolondrado. Recuerda que: "De insensatos es hablar y obrar sin reflexionar. Consulta, delibera y elige la más noble conducta".

Thales

—¡Pitágoras tiene razón!!! Me parece que te equivocaste, Leo. Y Robert también. ¿Qué pasa cuando la recta se hace paralela a los ejes?, es decir cuando la pendiente tiende a cero o a infinito. El área tiende a infinito, entonces no es constante.

Napoleón

—¡Aparecieron los dinosaurios!!! ¡Jurasik Park!! Ya que aparecieron, ¿podrían resolver el problema del rusito? Para Pitágoras el problema del triángulo rectángulo es un juego de niños.

IsaacN

—¡Mejor que resuelvan el problema del copo sueco!!

G. W. Leibniz

—¡¡Sí, Newty!!!! Que estos dinosaurios resuelvan el problema de Koch. ¡Nosotros estamos para cosas más importantes!

ArquimDeSira

—Pitágoras, ahora que apareciste te recuerdo que lo que le preguntaste a Eratóstenes en "El Mesón de Diógenes", en aquella jornada en la que Herón se convirtió en el ídolo triangular, ya te lo respondió el coqueto Isaac. La deuda de Eratóstenes ya fue saldada por el inglesito. Ahora el que está en deuda eres tú. No resolviste el problema del mesonero ni el problema del camello introvertido.

Pitágoras

—Arquím, no tengo tiempo para pequeñeces. Me dedico a cosas más importantes. El problema de la lúnula puedes preguntarle a la ingeniera Eleo de Argentum y el del camello resuélvelo tú mismo, que para eso eres amigo de Eratóstenes.

ArquimDeSira

—¿A qué te dedicás de tanta importancia? De ti solo sabemos de tu teorema.

Pitágoras

—Estoy perfeccionando la teoría para que el esfuerzo para elevarse a la generalidad de un teorema matemático a partir de su cumplimiento, en casos particulares, ejemplifique el método pitagórico para la purificación y perfección del alma, que enseñe a conocer el mundo como armonía. En virtud de esta, el universo es un cosmos, es decir, un conjunto ordenado en el que los cuerpos celestes guardan una disposición armónica que haga que sus distancias estén entre sí en proporciones similares a las correspondientes a los intervalos de la octava musical; las esferas celestes, al girar, producirán la llamada música de las esferas, inaudible al oído humano por ser permanente y perpetua. Sabrás que la armonía es musical; pero su naturaleza inteligible es de tipo numérico, y si todo es armonía, el número resulta ser la clave de todas las cosas.

G. W. Leibniz

—¡Pitágoras, eres el más respetable de todos! Sigue con tus enseñanzas, que a este grupo de trastornados y desequilibrados le vendrá bien.

Pitágoras

—La concepción del número como principio de todas las cosas fundó las bases del idealismo platónico y se convirtió en tema recurrente o polémico de la filosofía occidental; aún más, en el siglo XVII un astrónomo tan insigne como Kepler, a quien se debe el descubrimiento de las órbitas elípticas de los planetas, seguía creyendo en la música de las esferas. Otros conceptos suyos, como los de armonía y la proporción, quedarían incorporados a la música y las artes. Fui el precursor del predicamento, a partir del cual Galileo realizó la revolución científica de la formalización matemática del conocimiento.

L. Euler

—¡Grande Pitágoras!!! Pero ¿quién es ingeniera Eleo y dónde queda Argentum?

Thales

—Ya te lo expliqué en el Prefacio de este libro y no sigas preguntando, nos daremos cuenta de que no leíste la "Historia de los 7 Sabios". Leo, recuerda el consejo pitagórico y trata de resolver el problema del rusito. Por la recta que no pasa por el origen, no te preocupes, seguramente lo resolverá el ingeniero Mario en Argentum.

Napoleón

—¿Quién dijo que los matemáticos somos aburridos? Esto es más divertido que ser emperador del mundo y más divertido que jugar al Tangram. Tendrá razón parcial ese señor Paenza de Argentum cuando diga que las matemáticas son divertidas. ¡Ja, ja, ja!

Thales

—Napo, ¿quién es ese señor Paenza de Argentum y por qué tendrá razón parcial?

Napoleón

— Es el Dr. Adrián Paenza, quien por primera vez en la historia en el siglo XXI hablará de las matemáticas divertidas, verdad a medias y parcial porque las matemáticas son divertidas y los matemáticos también. ¡Ja, ja, ja!

ArquimDeSira

—Muchas risas, mucha diversión: todo bien, pero ¡nadie resuelve los desafíos!!! Newty, del copo no dijiste nada ¡Niente!!

IsaacN

—Viejo, primero explica tú cómo harás para mover el mundo que ya está en movimiento. ¡Y deja de correr desnudo por las calles de Siracusa!!!! ¡Ja, ja, ja!

Thales

—Inglesito, te recuerdo que "el principio original de todas las cosas es el agua, de la que todo procede y a la que todo vuelve". Si no resuelves rápido el problema del copo, se derretirá y tu fama quedará diluida en el agua. ¡Ja, ja, ja! Y no te metas con los griegos, que somos los sabios de toda la historia.

R. Hooke

—Y tú no te metas con los ingleses que somos los primeros en tener una sociedad científica. Antes debieras explicar qué hacías en Giza con el pretexto de medir la altura de la gran pirámide.

IsaacN

—Pitágoras, con la excusa de tus ocupaciones filosóficas, te sacaste de encima los 2 problemas de Eratóstenes: el de la lúnula para la ingeniera y el del camello se lo

devolviste a Arquím, y vos, Robert, no me recuerdes la Royal Society, que ¡todavía no te disculpaste por el informe falso que hiciste!!!!

G.W.Leibniz

—¡¡El informe de Robert no es falso, es verdadero!!! Se quedó corto, debería haber informado también que te apropiaste del método del análisis que me pertenece.

Napoleón

—¡Volvieron las camorreras!!! Leibniz, los ingleses son así. Están acostumbrados a la piratería.

R. Hooke

—¡Pirata vos, Napo!! Quisiste apropiarte del mundo. En Waterloo te explicamos cuánto es dos más dos.

Así concluye esta historia (que no concluyó porque los actores siguieron con la camorra). Hay que concluir para poder terminar con este libro y cubrir la ansiedad de los lectores que ya podrán descubrir en estas páginas lo que tanto estaban esperando: poder divertirse con las matemáticas, y ¡¡con los matemáticos!!!!

Nota 1: Cuenta el hacker que se inmiscuyó en esta historia que la discusión continuó y continuó subiendo de tono. Y que nadie salió del grupo a pesar de que el trato entre los "genius" cada vez fue menos amistoso.

Nota 2: El grupo Genius estaba integrado por más miembros de los que participaron. Entre otros estaban Da Vinci, Pascal y Kepler.

Nota 3: Cuentan los curiosos que hackearon al hacker que Descartes resolvió el problema de la recta, pero no lo quiso revelar para que lo resolvieran quienes tienen este libro en sus manos.

Nota 4: Dice el Dr. Paenza que el 7 de junio de 1742 Goldbach le escribió una carta a Leonhard Euler, sugiriéndole que pensara una demostración para el 2° desafío de esta historia. Al principio, Euler no le prestó demasiada atención al problema porque le pareció trivial. Bueno, trivial o no, Euler no pudo encontrar la demostración y, en realidad, luego de más de dos siglos y medio todavía no pudo ser resuelto por ningún ser humano. Desde 1742 hasta hoy nadie pudo resolver el problema, pero tampoco nadie pudo demostrar que fuera falso.

Nota 5: Newton siguió entretenido con su gran descubrimiento y Leibniz con sus disquisiciones filosóficas, dejando el problema del copo para quienes quisieran pasar a integrar el grupo "Genius".

Nota 6: Todos felices cuando se enteraron de que serían los actores del final de este libro.

El libro *Arquimédicos*,
de Rolando Mazzaglia,
se terminó de editar en diciembre de 2020,
por EUCASA (Editorial Universidad Católica de Salta)
http://www.ucasal.edu.ar/eucasa

ArquiMática

ROLANDO MAZZAGLIA

ArquiMática • Rolando Mazzaglia